Таким образом, силовая функция однородного сфероида на точку P в области $r < a$ определится следующей формулой:

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{2\pi f\mu\delta}{3}(3a^2 - r^2) + \frac{4\pi f\mu\,\delta a^3}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(\theta, \lambda)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n. \quad (5.92)$$

Вводя в эту формулу массу тела m и полагая еще

$$u_0(\theta, \lambda) = \frac{1}{2},$$

мы напишем формулу (5.92) в следующем виде:

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{f\mu m}{a}\left\{-\frac{r^2}{a^2} + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(\theta, \lambda)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n\right\}. \quad (5.92')$$

Нетрудно проверить, так же как это было сделано выше для случая внешней точки, что ряд (5.92) остается сходящимся и на поверхности S' и, следовательно, определяет силовую функцию однородного сфероида во всех точках внутри области S'.

Примечание. Мы рассмотрели только простейший случай, когда сфероид имеет постоянную плотность. Лаплас рассматривал и более общий случай—неоднородного сфероида, когда поверхности равной плотности, так же как и внешняя поверхность тела, мало отличаются от концентрических сфер.

Разумеется, что разложение силовой функции подобного сфероида должно иметь вид (5.10) или (5.16), и вопрос опять заключается только в вычислении коэффициентов этих разложений. Так как эти вычисления не приводят к таким же простым формулам, как для однородного сфероида, то мы приводить их здесь не будем.

§ 5. Разложение силовой функции взаимного притяжения двух конечных тел

Рассмотрим два тела T_1 и T_2, совершенно произвольных по своей внешней форме и внутреннему строению. Пусть M_i ($i = 1, 2$) есть текущая точка тела T_i, в которой сосредоточена элементарная притягивающая масса

$$dm_i = \delta_i\, dT_i,$$

где δ_i — плотность тела T_i (линейная, поверхностная или объемная), а dT_i обозначает пространственный элемент тела (элемент дуги линии, площади поверхности или объема). Полагая $\overline{M_1M_2} = \Delta$, мы имеем следующее выражение для взаимной силовой функции двух тел:

$$U = f \int\limits_{(T_1)} \int\limits_{(T_2)} \frac{dm_1\, dm_2}{\Delta}, \tag{5.93}$$

где интегрирование распространяется на обе притягивающие массы и, следовательно, кратность интеграла k удовлетворяет условию $2 \leqslant k \leqslant 6$.

Как было уже установлено в главе первой, величина, определяемая формулой (5.93), зависит от положения и ориентации каждого из двух тел относительно некоторой абсолютной (т. е. не связанной ни с одним из двух тел T_1 и T_2) системы координат, или, если угодно, от положения и ориентации одного тела относительно другого.

Обозначим, как и в главе I, через ξ_i, η_i, ζ_i координаты точки G_i, жестко связанной с телом T_i, и через ψ_i, ϑ_i, φ_i — углы Эйлера, определяющие ориентацию «собственной» системы координат с началом в точке G_i относительно абсолютных осей. Тогда силовая функция U есть некоторая функция от двенадцати независимых переменных:

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \psi_1,\ \vartheta_1,\ \varphi_1,\quad \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2,\ \psi_2,\ \vartheta_2,\ \varphi_2, \tag{5.94}$$

производные первого порядка от которой дают составляющие сил притяжения, действующих на рассматриваемые тела, а также составляющие моментов этих сил относительно центров приведения G_1 и G_2.

Полезно заметить еще раз, что центр приведения тела T_i, т. е. точка G_i, может быть выбрана совершенно произвольно (лишь бы она была жестко связана с телом) и может даже и не принадлежать телу T_i. В частности, за эту точку G_i можно, если угодно, взять центр инерции тела T_i, который вообще будем обозначать через C_i.

Задача, которую мы здесь будем рассматривать, заключается в нахождении явного выражения для силовой функции в зависимости от величин (5.94) или каких-либо других величин, им эквивалентных. Так как получить такое явное выражение в конечном виде в общем случае, очевидно, невозможно, то задача приводится к представлению функции U при помощи бесконечного ряда того или иного вида.

Указанное разложение силовой функции взаимного притяжения двух тел может быть получено, например, на основании такого же принципа, как и разложение силовой функции тела на точку, рассмотренное в предыдущих параграфах.

Установим форму этого разложения и приведем его первые члены, проводя выкладки несколько более подробно, чем это сделано в известном трактате Тиссерана или в курсе механики Д. Бобылева.

Для упрощения выкладок возьмем начало координат в точке G_2, оставляя направления координатных осей параллельными соответствующим направлениям абсолютных осей.

Обозначим через x, y, z координаты текущей точки M_1 тела T_1 в этой системе координат и положим еще

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Перепишем формулу (5.93) в виде

$$U=f\int\limits_{(T_1)} dm_1 \int\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta}=f\int\limits_{(T_1)} U_2(M_1)\,dm_1, \qquad (5.93')$$

где положено

$$U_2(M_1)=\int\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta}. \qquad (5.95)$$

Очевидно, что $U_2(M_1)$ есть силовая функция тела T_2 на материальную частицу единичной массы, помещенную в текущей точке M_1 тела T_1.

Предполагая, что тела T_1 и T_2 достаточно удалены друг от друга, мы можем определить функцию $U_2(M_1)$ разложением типа (5.20) и написать

$$U_2(M_1)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n^{(2)}(x, y, z)}{r^{2n+1}}, \qquad (5.95')$$

где $U_n^{(2)}(x, y, z)$ суть многочлены относительно координат точки M_1 (относительно точки G_2), коэффициенты которых зависят от эйлеровых углов ψ_2, ϑ_2, φ_2 тела T_2. Так как

$$x=x_1'-\xi_2, \quad y=y_1'-\eta_2, \quad z=z_1'-\zeta_2,$$

где буквы со штрихом обозначают абсолютные координаты точки M_1, то величины $U_n^{(2)}(x, y, z)$ можно рассматривать как многочлены относительно абсолютных координат точки G_2, зависящие от эйлеровых углов тела T_2.

Рассмотрим теперь треугольник $G_1M_1G_2$, в котором сторона $\overline{M_1G_2}$ равна r. Положим еще

$$R=\overline{G_1G_2}, \quad r'=\overline{M_1G_1}, \quad \gamma=\angle(\overrightarrow{G_1G_2}, \overrightarrow{G_1M_1});$$

тогда $r^2=R^2+r'^2-2Rr'\cos\gamma$, и мы можем написать

$$\frac{1}{r^{2n+1}}=\frac{1}{R^{2n+1}}\left[1-2\frac{r'}{R}\cos\gamma+\frac{r'^2}{R^2}\right]^{-n-\frac{1}{2}}. \tag{5.96}$$

Поэтому

$$U_2(M_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(2)}(x, y, z)}{R^{2n+1}}\left[1-2\frac{r'}{R}\cos\gamma+\frac{r'^2}{R^2}\right]^{-n-\frac{1}{2}}. \tag{5.95''}$$

Внося это разложение в формулу (5.93), мы представим разложение силовой функции U в следующем виде:

$$U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(1, 2)}}{R^{2n+1}}. \tag{5.97}$$

Здесь R есть расстояние между центрами приведения тел T_1 и T_2, которое в произвольной абсолютной системе координат равно

$$R=\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2},$$

а $U_n^{(1, 2)}$ суть некоторые многочлены относительно абсолютных координат точек G_1 и G_2. Коэффициенты этих многочленов зависят от эйлеровых углов обоих тел.

Разложение (5.97), очевидно, сходится и представляет силовую функцию взаимного притяжения двух тел в области, определяемой неравенством $R>\bar{r}_1+\bar{r}_2$, где

$$\bar{r}_1=\max(\overline{G_1M_1}), \quad \bar{r}_2=\max(\overline{G_2M_2}).$$

Коэффициенты разложения (5.97) определяются формулой

$$U_n^{(1, 2)}=\int\limits_{(T_1)}\frac{U_n^{(2)}(x, y, z)\,dm_1}{\left(1-2\frac{r'}{R}\cos\gamma+\frac{r'^2}{R^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{5.98}$$

при помощи которой они и могут быть вычислены. Для этого нужно прежде всего разложить в ряд выражение (5.96), а затем произвести соответствующие интегрирования.

Найдем сначала несколько первых членов разложения силовой функции, предполагая, что расстояние R настолько велико по сравнению с $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, что членами выше третьего порядка относительно обратного расстояния $1/R$ можно пренебрегать. По формулам (5.34), (5.35) и (5.37) мы находим

$$U_0^{(2)}(x, y, z) = m_2,$$
$$U_1^{(2)}(x, y, z) = m_2(\bar{\xi}_2 x + \bar{\eta}_2 y + \bar{\zeta}_2 z),$$
$$U_2^{(2)}(x, y, z) = \frac{r^2}{2}\left[A_2 + B_2 + C_2 - 3J_2'\right],$$

где m_2 есть масса тела T_2; $\bar{\xi}_2$, $\bar{\eta}_2$, $\bar{\zeta}_2$ — координаты его центра инерции в системе координат с началом в G_2; A_2, B_2, C_2 — его моменты инерции относительно тех же осей координат и J_2' — его момент инерции относительно прямой G_2M_1.

Заметим, что если центр приведения G_2 взят в центре инерции тела T_2, то $\bar{\xi}_2 = \bar{\eta}_2 = \bar{\zeta}_2 = 0$ и, следовательно, $U_1^{(2)}(x, y, z) = 0$. Теперь формула (5.98) дает

$$\frac{U_0^{(1,2)}}{R} = \frac{m_2}{R}\int\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{\left(1 - 2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \frac{r'^2}{R'^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = m_2\int\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{r}.$$

Для вычисления этого интеграла мы можем отнести тело T_1 к собственной системе координат с началом в точке G_1, а тогда ясно, что написанное выражение представляет собой силовую функцию тела T_1 на материальную частицу с массой m_2, помещенную в точке G_2. Следовательно, если ξ, η, ζ суть координаты G_1 относительно G_2, то $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ суть координаты G_2 относительно G_1 (оси обеих систем по условию параллельны), и мы будем иметь, применяя опять формулы (5.34), (5.35) и (5.37):

$$\frac{U_0^{(1,2)}}{R} = \frac{m_2 m_1}{R} + \frac{m_2 m_1}{R^3}(-\xi\bar{\xi}_1' - \eta\bar{\eta}_1' - \zeta\bar{\zeta}_1') + \\ + \frac{m_2}{2R^3}[A_1 + B_1 + C_1 - 3J_1] + \ldots; \qquad (5.99)$$

здесь m_1 есть масса тела T_1; $\bar{\xi}_1'$, $\bar{\eta}_1'$, $\bar{\zeta}_1'$ — координаты его центра инерции в системе осей с началом в точке G_1; A_1, B_1,

C_1 — его моменты инерции относительно тех же осей и J_1 — момент инерции относительно прямой G_1G_2.

Если за центр приведения тела T_1 взят его центр инерции, то $\overline{\xi}_1' = \overline{\eta}_1' = \overline{\zeta}_1' = 0$ и второй член в правой части формулы (5.99) исчезает. Далее, имеем, если $U_1^{(2)} \neq 0$,

$$\frac{U_1^{(1,2)}}{R^3} = \int\limits_{(T_1)} \frac{U_1^{(2)}(x, y, z)\, dm_1}{r^3} =$$

$$= m_2\overline{\xi}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{x\, dm_1}{r^3} + m_2\overline{\eta}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{y\, dm_1}{r^3} + m_2\overline{\zeta}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{z\, dm_1}{r^3}.$$

Переходя опять к собственной для тела T_1 системе координат, мы имеем, например,

$$\int\limits_{(T_1)} \frac{x\, dm_1}{r^3} = \int\limits_{(T_1)} \frac{(\xi_1' + \xi)\, dm_1}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{r}.$$

Аналогично можем представить и два других интеграла, что позволяет написать следующую формулу:

$$\frac{U_1^{(1,2)}}{R^3} = -\overline{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right) - \overline{\eta}_2 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right) - \overline{\zeta}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right). \tag{5.100}$$

Производные, сюда входящие, легко находятся из (5.99), причем при дифференцировании нужно иметь в виду, что

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Наконец, для $n = 2$ имеем

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^5} = \int\limits_{(T_1)} \frac{U_2^{(2)}(x, y, z)\, dm_1}{r^5} = \frac{1}{2} \int\limits_{(T_1)} \frac{(A_2 + B_2 + C_2 - 3J_2')\, dm_1}{r^3},$$

а ограничиваясь, как было условлено, членами третьей степени относительно $1/R$, мы найдем

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^5} = \frac{1}{2R^3}\left[m_1(A_2 + B_2 + C_2) - 3\int\limits_{(T_1)} J_2'\, dm_1\right].$$

Но

$$J_2' = J_2 \cos^2 \alpha,$$

где α есть угол между направлением $\overrightarrow{G_2M_1}$ и направлением $\overrightarrow{G_2G_1}$, а так как по условию размеры тела T_1 очень малы по сравнению с расстоянием R, то для любой точки тела M_1 этот угол также весьма мал, а поэтому с принятой степенью точности

$$\int\limits_{(T_1)} J_2'\,dm_1 \cong m_1 J_2,$$

где J_2 есть момент инерции тела T_2 относительно прямой G_1G_2.

Поэтому можем написать

$$\frac{U_2^{(1,\,2)}}{R^5} = m_1 \frac{A_2 + B_2 + C_2 - 3J_2}{2R^3}. \tag{5.101}$$

Выпишем теперь окончательное приближенное выражение для силовой функции, принимая притом для упрощения центры инерции тел T_1 и T_2 за центры приведения.

Тогда формулы (5.99), (5.100) и (5.101) дают

$$U = f\frac{m_1 m_2}{R} + f m_1 \frac{A_2 + B_2 + C_2 - 3J_2}{2R^3} + \\ + f m_2 \frac{A_1 + B_1 + C_1 - 3J_1}{2R^3} + \ldots \tag{5.102}$$

Заметим, что если за оси собственных систем координат тел T_1 и T_2 взяты главные оси инерции этих тел, то величины A_i, B_i, C_i суть главные центральные моменты инерции тела T_i, а момент инерции J_i относительно прямой G_1G_2, проходящей через центры инерции двух тел, определится формулой

$$J_i = A_i\alpha_i^2 + B_i\beta_i^2 + C_i\gamma_i^2 \qquad (i = 1,\ 2),$$

где α_i, β_i, γ_i суть косинусы углов, образуемых прямой G_1G_2 с главными центральными осями инерции тела T_i $(i = 1,\ 2)$. Вспоминая выражения для направляющих косинусов этих осей инерции относительно абсолютной системы координат, мы имеем *)

$$\alpha_i = (\cos\psi_i \cos\varphi_i - \sin\psi_i \sin\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{\xi_2 - \xi_1}{R} + \\ + (\sin\psi_i \cos\varphi_i + \cos\psi_i \sin\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{\eta_2 - \eta_1}{R} + \sin\varphi_i \sin\vartheta_i \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{R},$$

*) См. Г. Н. Дубошин, О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения взаимно притягивающихся твердых тел, Астрон. журн. АН СССР, т. XXXV, 1958.

$$\beta_i = (-\cos\psi_i \sin\varphi_i - \sin\psi_i \cos\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{\xi_2-\xi_1}{R} +$$
$$+(-\sin\psi_i \sin\varphi_i + \cos\psi_i \cos\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{\eta_2-\eta_1}{R} + \cos\varphi_i \sin\vartheta_i \frac{\zeta_2-\zeta_1}{R},$$
$$\gamma_i = \sin\psi_i \sin\vartheta_i \frac{\xi_2-\xi_1}{R} - \cos\psi_i \sin\vartheta_i \frac{\eta_2-\eta_1}{R} + \cos\vartheta_i \frac{\zeta_2-\zeta_1}{R},$$

где, как уже было отмечено выше,

$$R^2 = (\xi_2-\xi_1)^2 + (\eta_2-\eta_1)^2 + (\zeta_2-\zeta_1)^2,$$

если тела T_1 и T_2 отнесены к абсолютной системе координат и $R^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2$, если тело T_1 отнесено к системе координат, связанной с телом T_2.

Ввиду выражений для моментов инерции J_i и направляющих косинусов α_i, β_i, γ_i функция U, определяемая формулой (5.102), является явной функцией от переменных (5.94), и дифференцирование этой функции по переменным (5.94) даст составляющие сил притяжения и их моментов.

Эти дифференцирования вполне элементарны, но несколько громоздки, а поэтому мы их приводить здесь не будем.

Отметим еще, что при очень большом R по сравнению с $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ мы можем ограничиться только одним первым членом в формуле (5.102), а тогда получим известное уже выражение для силовой функции двух тел, находящихся на весьма большом по сравнению с их линейными размерами расстоянии друг от друга.

Возвратимся теперь к формуле (5.98) и покажем, как можно осуществить разложение функции $U_n^{(1,2)}$ в общем виде.

Для этого рассмотрим сначала вкратце некоторое обобщение многочленов Лежандра, принадлежащее Гегенбауеру *).

Рассмотрим вместо производящей функции многочленов Лежандра следующую функцию:

$$G^{(n)}(x, \alpha) = \frac{1}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{5.103}$$

где n есть целое положительное число, x по-прежнему обо-

---

*) См. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 2, пер. с англ., ГТТИ, 1934, а также Г. Н. Дубошин, Разложение обратного расстояния в теории притяжения, Прикл. матем. и мех., т. X, 1946.

значает косинус некоторого угла и параметр α имеет значение, численно меньшее единицы.

Можно доказать, на чем для сокращения мы останавливаться не будем *), что при этих условиях функция (5.103) разложима в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по степеням параметра α. Этот ряд запишем следующим образом:

$$G^{(n)}(x, \alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p G_p^{(n)}(x), \tag{5.104}$$

и покажем, что его коэффициенты являются многочленами p-й степени относительно x, которые будем называть многочленами Гегенбауера и частным случаем которых являются многочлены Лежандра.

Для доказательства выведем для коэффициентов $G_p^{(n)}(x)$ рекуррентную формулу, аналогичную такой же формуле для многочленов Лежандра. Дифференцируя равенство (5.104) по параметру α, имеем

$$\frac{(2n+1)(x-\alpha)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{n+\frac{3}{2}}} = \sum_{p=0}^{\infty} p\alpha^{p-1} G_p^{(n)}(x).$$

Это равенство можно также написать в виде

$$(2n+1)(x-\alpha)\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p G_p^{(n)}(x) = (1-2\alpha x+\alpha^2)\sum_{p=0}^{\infty} p\alpha^{p-1} G_p^{(n)}(x).$$

Приравнивая теперь коэффициенты при α^p в левой и правой частях равенства, мы найдем

$$(2n+1)\left[xG_p^{(n)} - G_{p-1}^{(n)}\right] = \\ = (p+1)G_{p+1}^{(n)} - 2pxG_p^{(n)} + (p-1)G_{p-1}^{(n)},$$

откуда имеем искомую рекуррентную формулу

$$(p+1)G_{p+1}^{(n)}(x) = (2n+2p+1)\,xG_p^{(n)}(x) - (2n+p)\,G_{p-1}^{(n)}. \tag{5.105}$$

*) Доказательство сходимости ряда (5.104) проводится совершенно так же, как и доказательство сходимости ряда, представляющего производящую функцию многочленов Лежандра, приведенное на стр. 192. Действительно, функция (5.103) имеет те же особые точки, что и функция (4.31).

Но, с другой стороны, коэффициенты $G_p^{(n)}$ можно рассматривать как коэффициенты разложения функции $G^{(n)}(x, \alpha)$ в ряд Тэйлора, т. е. можно написать

$$G_p^{(n)}(x) = \frac{1}{p!}\left[\frac{d^p G^{(n)}(x, \alpha)}{d\alpha^p}\right]_{\alpha=0}.$$

Полагая $p = 0$ и $p = 1$, находим отсюда

$$G_0^{(n)}(x) = 1, \quad G_1^{(n)}(x) = (2n+1)\,x,$$

после чего формула (5.105) даст последовательно все остальные коэффициенты, и мы видим, что действительно $G_p^{(n)}(x)$ есть многочлен p степени относительно x, содержащий только четные степени x, если p есть число четное, и только нечетные степени x, если p есть число нечетное. Кроме того, непосредственно видно, что

$$G_p^{(0)}(x) = P_p(x).$$

Применяя формулу (5.105), найдем последовательно

$$G_2^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)\,x^2 - \frac{1}{2}(2n+1),$$

$$G_3^{(n)}(x) = \frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)(2n+5)\,x^3 - \frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)\,x$$

и так далее. Нетрудно также получить общую формулу для многочленов Гегенбауера, применяя метод индукции к рекуррентной формуле (5.105). Эта общая формула имеет вид

$$G_p^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)} x^{p-2s}, \tag{5.106}$$

где $G_{ps}^{(n)}$ суть числовые коэффициенты, определяемые следующей формулой:

$$G_{ps}^{(n)} = (-1)^s \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2p-2s-1)}{2^s s!\,(p-2s)!}. \tag{5.107}$$

Используя теперь указанные формулы, мы можем представить формулу (5.96) в следующем виде:

$$\frac{1}{r^{2n+1}}=\frac{1}{R^{2n+1}}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{R}\right)^p G_p^{(n)}(\cos\gamma), \tag{5.108}$$

а коэффициенты $U_n^{(1,\,2)}$ разложения (5.97), определяемые формулой (5.98), представятся в виде

$$U_n^{(1,\,2)}=\sum_{p=0}^{\infty}\int\limits_{(T_1)} U_n^{(2)}(x,\ y,\ z)\left(\frac{r'}{p}\right)^p G_p^{(n)}(\cos\gamma)\,dm_1. \tag{5.109}$$

Так как

$$r'R\cos\gamma=-\xi(x-\xi)-\eta(y-\eta)-\zeta(z-\zeta)=$$
$$=R^2-\xi x-\eta y-\zeta z,$$

то

$$r'^pR^pG_p^{(n)}(\cos\gamma)=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)}(r'R\cos\gamma)^{p-2s}\,r'^{2s}R^{2s}=$$

$$=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)}(R^2-\xi x-\eta y-\zeta z)^{p-2s}\,r'^{2s}R^{2s}=U_{n,\,p}^{(1)}(x,\ y,\ z),$$

и мы можем переписать формулу (5.109) в следующем виде:

$$U_n^{(1,\,2)}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{U_{n,\,p}^{(1,\,2)}}{R^{2p}}, \tag{5.109'}$$

где положено

$$U_{n,\,p}^{(1,\,2)}=\int\limits_{(T_1)} U_n^{(2)}(x,\ y,\ z)\,U_{n,\,p}^{(1)}(x,\ y,\ z)\,dm_1. \tag{5.110}$$

Очевидно, что подынтегральная функция есть многочлен относительно координат текущей точки M_1, а поэтому вычисление коэффициентов (5.110) сводится к интегрированию многочленов и никаких затруднений, кроме выполнения довольно громоздких выкладок, не представляет.

Примечание. Разложение силовой функции двух тел выполнено здесь на основе классического разложения силовой функции тела на материальную точку, подобно тому, как это сделано в работе А. А. Орлова *). Можно, конечно, получить нужное разложение и другими способами. Например, такое общее разложение получено М. С. Яров-Яровым на основе формулы кратного ряда Тэйлора. В работе М. С. Яров-Ярового выписаны также первые члены общего разложения с точностью до пятой степени обратного взаимного расстояния **).

В. Т. Кондурарь получил удобную форму разложения силовой функции для важного частного случая, когда каждое из двух тел есть эллипсоид вращения, обладающий эллипсоидальным распределением плотностей. Разложение, полученное В. Т. Кондурарем, основано на разложении обратного расстояния между двумя элементарными массами по способу, указанному автором этой книги. В. Т. Кондурарь получил также разложение силовой функции взаимного притяжения двух однородных материальных отрезков ***).

Разложение силовой функции взаимного притяжения двух тёл чрезвычайно упрощается, если одно из этих тел есть шар, однородный, или обладающий сферическим распределением плотностей. Действительно, как было показано в главе III, такой шар притягивает и притягивается как материальная точка, масса которой равна массе шара и которая помещена в его центре.

Поэтому если шар находится вне тела, то разложение взаимной силовой функции прямо определится формулой (5.20), где x, y, z будут обозначать координаты центра шара в системе координат, жестко связанной со вторым притягивающим телом, а r — расстояние от центра шара до начала «собственной» для второго тела системы координат.

Поэтому чтобы получить нужное разложение силовой функции шара и второго тела в системе координат, независимой от этих тел, нужно еще совершить преобразование координат, указанное в главе I.

---

*) А. А. Орлов, Приближенное представление потенциала взаимного тяготения двух тел, Вестник МГУ, № 3, 1960.

**) М. С. Яров-Яровой, О разложении силовой функции притяжения двух тел, Вестник МГУ, №№ 5, 6, 1958.

***) В. Т. Кондурарь, Разложение силовой функции взаимного притяжения двух эллипсоидов, Астрон. журн. АН СССР, т. XXXV, 1958. Его же, К вопросу о потенциале взаимного притяжения двух неоднородных твердых тел, Учен. записки Ивановского пединститута, т. V, 1954.

Если одно тело, пусть T_1, есть опять шар, обладающий сферической структурой, а второе тело T_2 обладает геометрической и механической симметрией относительно некоторой оси, то задача о разложении взаимной силовой функции еще более упрощается. Действительно, такое разложение дается формулой (5.54), где r можно рассматривать как расстояние от центра шара до центра приведения тела T_2 (этот центр приведения нужно взять на оси симметрии тела T_2), а θ — как угол, образованный направлением r с направлением оси симметрии тела. Тогда если ξ_1, η_1, ζ_1 суть координаты центра шара, а ξ_2, η_2, ζ_2 — координаты центра приведения тела T_2, то мы будем иметь

$$r^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2$$

и

$$\cos\theta = \frac{\xi_2 - \xi_1}{r} \sin\psi \sin\vartheta - \frac{\eta_2 - \eta_1}{r} \cos\psi \sin\vartheta + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{r} \cos\vartheta,$$

где ψ и ϑ суть обычные углы прецессии и нутации тела T_2 в произвольной системе координат.

Таким образом, силовая функция взаимного притяжения шара и тела

$$U = fm_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0} P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

будет функцией восьми независимых переменных, а если тело T_2 отнести к системе координат с началом в центре шара, то, обозначая координаты центра приведения тела T_2 в этой системе координат через ξ, η, ζ, мы имеем

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

и

$$\cos\theta = \frac{\xi}{r} \sin\psi \sin\vartheta - \frac{\eta}{r} \cos\psi \sin\vartheta + \frac{\zeta}{r} \cos\vartheta,$$

так что силовая функция будет зависеть только от пяти независимых переменных, определяющих положение и ориентацию тела T_2 относительно шара T_1 *).

---

*) См. Г. Н. Дубошин, О взаимном потенциале шара и тела вращения, Вестник МГУ, № 4, 1959.