III.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

500. Приведенные ниже формулы относятся к главным значениям обратных тригонометрических функций: для $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, для $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ от 0 до π. Интегрируя эти функции, следует выбирать пределы таким образом, чтобы между ними не было точек разрыва. Полезно предварительно построить график подынтегральной функции, так как он может состоять из нескольких ветвей.

501. $$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots \qquad [x^2 < 1].$$

(Получается разложением в ряд $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и последующим интегрированием его.)

502. $$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right) \qquad [x^2 < 1].$$

503. $$\operatorname{arccsc} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7x^7} + \ldots \qquad [x^2 > 1].$$

504. $$\operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7x^7} + \ldots\right) \qquad [x^2 > 1].$$

505.1. $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad [x^2 < 1].$$

(Получается разложением в ряд $\frac{1}{1+x^2}$ и последующим интегрированием его.)

505.2. $$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots \qquad [x > 1].$$

505.3. $$\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots \qquad [x < -1].$$

505.4. $$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\ldots\right] \qquad [x^2<\infty].$$

506.1. $$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\ldots \qquad [x^2<1].$$

506.2. $$\operatorname{arcctg} x = \frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{7x^7}+\ldots \qquad [x>1].$$

506.3. $$\operatorname{arcctg} x = \pi+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{7x^7}+\ldots \qquad [x<-1].$$

507.10. $$\operatorname{Arcsin}(x\pm iy) = n\pi+(-1)^n \arcsin\frac{2x}{p+q} \pm i(-1)^n \operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}.$$

Значения p и q см. **507.11** и **507.12.**

Величина $i=\sqrt{-1}$, а n — целое число или 0. Величина x может быть положительна или отрицательна, а y — положительна.

507.11. Здесь обозначено $p=\sqrt{(1+x)^2+y^2}$.

507.12. Здесь обозначено $q=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$.

Заметим, что при $y=0$ и $x>1$, $q=x-1$ и $p+q=2x$. При $y=0$ и $x<1$ $q=1-x$ и $p+q=2$.
Иначе:

507.13а. $$\operatorname{Arcsin} A = -i\ln\left(\pm\sqrt{1-A^2}+iA\right)+2k\pi$$

или

507.13б. $$\operatorname{Arcsin} A = i\ln\left(\pm\sqrt{1-A^2}-iA\right)+2k\pi,$$

где A может быть комплексной величиной, а k — целое число или 0.

О квадратном корне из комплексной величины см. 58, а о логарифме см. **604.** Выражения **507.13а** и **507.13б** тождественны. Из них следует выбрать то, в котором не происходит потери точности при вычитании.

507.20. $$\operatorname{Arccos}(x+iy) = \pm\left(\arccos\frac{2x}{p+q}+2k\pi-i\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}\right).$$

507.21. $$\operatorname{Arccos}(x-iy) = \pm\left(\arccos\frac{2x}{p+q}+2k\pi+i\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}\right),$$

где y положительно. Здесь берется положительное значение $\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}$. Значения p и q см. **507.11** и **507.12.**

Иначе:

507.22а. $\operatorname{Arccos} A = \mp i \ln (A + \sqrt{A^2 - 1}) + 2k\pi$
или

507.22б. $\operatorname{Arccos} A = \pm i \ln (A - \sqrt{A^2 - 1}) + 2k\pi$,
где A может быть комплексной величиной. См. примечание к **507.13.**

507.30. $$\operatorname{Arctg}(x + iy) = \frac{1}{2}\left[(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\frac{1+y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}\right] + \frac{i}{4}\ln\frac{(1+y)^2 + x^2}{(1-y)^2 + x^2}.$$

Иначе:

507.31. $$\operatorname{Arctg}(x + iy) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1 - x^2 - y^2} + k\pi + \frac{i}{4}\ln\frac{(1+y)^2 + x^2}{(1-y)^2 + x^2},$$

где k — целое число или нуль; $\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2-y^2}$ берется в квадранте, определяемом знаками числителя и знаменателя (а не в смысле главного значения).

507.32. $$\operatorname{Arctg}(x + iy) = \frac{i}{2}\ln\frac{1 + y - ix}{1 - y + ix} + 2k\pi.$$ [См. **604.**]

508. Для малых значений $\arccos x$,

$$\arccos x = \left[2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^2 + \frac{4}{45}(1-x)^3 + \frac{1}{35}(1-x)^4 + \ldots\right]^{1/2}.$$

Последним членом можно практически пренебречь. Численное значение квадратного корня можно брать из подробных таблиц квадратных корней (см., например, [18]).