

## ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

$$550. \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$550.1. \quad a^x = e^{x \ln a} = \\ = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$550.2. \quad e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$551. \quad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \frac{B_4 x^8}{8!} + \dots \\ [x^2 < 4\pi^2; \text{ см. 45}].$$

$$552.1. \quad e^{\sin u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} - \frac{3u^4}{4!} - \frac{8u^5}{5!} - \frac{3u^6}{6!} + \frac{56u^7}{7!} + \dots \quad [u^2 < \infty].$$

$$552.2. \quad e^{\cos u} = e \left[ 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{4u^4}{4!} - \frac{31u^6}{6!} + \dots \right] \quad [u^2 < \infty].$$

$$552.3. \quad e^{\operatorname{tg} u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{3u^2}{3!} + \frac{9u^4}{4!} + \frac{37u^5}{5!} + \dots \quad \left[ u^2 < \frac{\pi^2}{4} \right].$$

$$552.4. \quad e^{\arcsin u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{2u^3}{3!} + \frac{5u^4}{4!} + \dots \quad [u^2 < 1].$$

$$552.5. \quad e^{\operatorname{arctg} u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} - \frac{7u^4}{4!} + \frac{5u^5}{5!} + \dots \quad [u^2 < 1].$$

Общий член этого ряда  $u_n = \frac{a_n u^n}{n!}$ , где

$$552.6. \quad e^{-x^2} + e^{-2^2 x^2} + e^{-3^2 x^2} + \dots = \\ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{x} \left[ \frac{1}{2} + e^{-\pi^2/x^2} + e^{-2^2 \pi^2/x^2} + e^{-3^2 \pi^2/x^2} + \dots \right].$$

Второй ряд может сходиться быстрее первого.

$$553. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0 \text{ для любого } n.$$

## Показательные функции — Производные

$$563. \quad \frac{de^x}{dx} = e^x. \quad 563.1. \quad \frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}. \quad 563.2. \quad \frac{da^x}{dx} = a^x \ln a.$$

$$563.3. \quad \frac{da^{cx}}{dx} = ca^{cx} \ln a. \quad 563.4. \quad \frac{da^y}{dx} = a^y (\ln a) \frac{dy}{dx},$$

где  $a$  — константа.

$$563.5. \quad \frac{du^y}{dx} = yu^{y-1} \frac{du}{dx} + u^y (\ln u) \frac{dy}{dx}.$$

$$563.6. \quad \frac{dx^y}{dx} = yx^{y-1} + x^y (\ln x) \frac{dy}{dx}.$$

$$563.7. \quad \frac{dx^x}{dx} = x^x (1 + \ln x).$$

## Показательные функции — Интегралы

$$565. \quad \int e^x dx = e^x. \quad 565.1. \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$565.2. \quad \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \quad 565.3. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}.$$

$$566. \quad \int f(e^{ax}) dx = \frac{1}{a} \int \frac{f(z) dz}{z},$$

где  $z = e^{ax}$ . Заметим, что

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{и} \quad a^{cx} = e^{cx \ln a}.$$

$$567.1. \quad \int xe^{ax} dx = e^{ax} \left[ \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right].$$

$$567.2. \quad \int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left[ \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right].$$

$$567.3. \quad \int x^3 e^{ax} dx = e^{ax} \left[ \frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right].$$

$$567.8. \quad \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

$$567.9. \quad \int x^n e^{ax} dx = e^{ax} \left[ \frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{n! x}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \right] \quad [n \geq 0].$$

$$568.1. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x} = \\ = \ln |x| + \frac{ax}{1!} + \frac{a^2 x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{a^3 x^3}{3 \cdot 3!} + \dots + \frac{a^n x^n}{n \cdot n!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

568.11. Для  $\int \frac{c^x dx}{x}$  следует заметить, что  $c^x = e^{x \ln c}$ .

$$568.2. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x^2} = -\frac{e^{ax}}{x} + a \int \frac{e^{ax} dx}{x}. \quad [\text{См. 568.1.}]$$

$$568.3. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x^3} = -\frac{e^{ax}}{2x^2} - \frac{ae^{ax}}{2x} + \frac{a^2}{2} \int \frac{e^{ax} dx}{x}. \quad [\text{См. 568.1.}]$$

$$568.8. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x^n} = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax} dx}{x^{n-1}} \quad [n > 1].$$

$$568.9. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x^n} = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{ae^{ax}}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \dots \\ \dots - \frac{a^{n-2}e^{ax}}{(n-1)!x} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \int \frac{e^{ax} dx}{x} \\ [n > 1]. \quad [\text{См. 568.1.}]$$

$$569. \quad \int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) = \ln \frac{e^x}{1+e^x}.$$

$$569.1. \quad \int \frac{dx}{a+be^{px}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap} \ln |a+be^{px}|.$$

$$570. \quad \int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}.$$

$$570.1. \quad \int \frac{xe^{ax} dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}.$$

$$575.1. \quad \int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \sin x - \cos x).$$

$$575.2. \quad \int e^{ax} \sin^2 x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4} \left( a \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \frac{2}{a} \right).$$

$$575.3. \quad \int e^{ax} \sin^3 x dx = \\ = \frac{e^{ax}}{a^2+9} \left[ a \sin^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + \frac{6(a \sin x - \cos x)}{a^2+1} \right].$$

$$575.9. \quad \int e^{ax} \sin^n x dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2+n^2} (a \sin x - n \cos x) + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx.$$

$$576.1. \quad \int e^{ax} \cos x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \cos x + \sin x).$$

$$576.2. \quad \int e^{ax} \cos^2 x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4} \left( a \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \frac{2}{a} \right).$$

$$576.3. \quad \int e^{ax} \cos^3 x \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 9} \left[ a \cos^3 x + 3 \sin x \cos^2 x + \right. \\ \left. + \frac{6(a \cos x + \sin x)}{a^2 + 1} \right].$$

$$576.9. \quad \int e^{ax} \cos^n x \, dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cos x + n \sin x) + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx.$$

$$577.1. \quad \int e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \sin nx - n \cos nx).$$

$$577.2. \quad \int e^{ax} \cos nx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \cos nx + n \sin nx).$$