VI.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этих алгебраических выражениях ln обозначает натуральный, или Неперов, логарифм, а lg — десятичный логарифм.

600. $\ln a = 2{,}3026 \lg a.$ **600.1.** $\lg a = 0{,}43429 \ln a.$

601. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \qquad [-1 < x \leqslant 1].$

При $x = 1$ отсюда получается известный ряд:

601.01. $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

601.1. $\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right] \qquad [-1 \leqslant x < 1].$

601.2. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right],$
$= 2 \operatorname{Arth} x \qquad [x^2 < 1].$ [См. **708.**]

601.3. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots\right],$
$= 2 \operatorname{Arcth} x \qquad [x^2 > 1].$ [См. **709.**]

601.4. $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$
$= 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \ldots\right] \qquad [(2x+1)^2 > 1].$

601.41. $\ln(x+a) = \ln x + 2\left[\frac{a}{2x+a} + \frac{a^3}{3(2x+a)^3} + \frac{a^5}{5(2x+a)^5} + \ldots\right] \qquad [a^2 < (2x+a)^2].$

601.5. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \qquad [0 < x \leqslant 2].$

601.6. $\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \ldots \qquad \left[x > \frac{1}{2}\right].$

601.7. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \ldots\right] \qquad [x > 0].$

602.1. $\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right) =$

$= \frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{x^7}{a^7} + \ldots \qquad [x^2 < a^2],$

$= \ln\frac{2x}{a} + \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{a^4}{x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{a^6}{x^6} - \ldots \qquad \left[\frac{x}{a} > 1\right],$

$= -\ln\left|\frac{2x}{a}\right| - \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{a^4}{x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{a^6}{x^6} + \ldots \left[\frac{x}{a} < -1\right],$

$= \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} = \operatorname{Arcsch}\frac{a}{x}.$ [См. **706.**]

602.2. $\ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} - \frac{x}{a}\right) = -\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right).$

Ряд из **602.1** умножить на -1.

602.3. $\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) = \ln\frac{2x}{a} - \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{a^4}{x^4} -$

$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{a^6}{x^6} - \ldots \qquad \left[\frac{x}{a} > 1\right].$ [См. **260.01** и **707.**]

602.4. $\ln\left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) =$

$= -\ln\frac{2x}{a} + \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{a^4}{x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{a^6}{x^6} + \ldots \left[\frac{x}{a} > 1\right],$

$= -\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right).$ [См. **602.3** и **707.**]

602.5. $\ln\left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2}+1}\right) =$

$= \frac{a}{x} - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{a^3}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{a^5}{x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{a^7}{x^7} + \ldots \qquad [x^2 > a^2],$

$= \ln\frac{2a}{x} + \frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{a^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{x^6}{a^6} - \ldots \qquad \left[\frac{a}{x} > 1\right],$

$= -\ln\left|\frac{2a}{x}\right| - \frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{x^4}{a^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{x^6}{a^6} + \ldots \left[\frac{a}{x} < -1\right],$

$= \operatorname{Arcsch}\frac{x}{a} = \operatorname{Arsh}\frac{a}{x}.$ [См. **602.1** и **711.**]

602.6. $\ln\left(\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+1} - \frac{a}{x}\right) = -\ln\left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2}+1}\right).$

Ряд из **602.5** умножить на -1.

602.7. $\ln\left(\frac{a}{x}+\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right)=$

$$=\ln\frac{2a}{x}-\frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{a^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{x^4}{a^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{x^6}{a^6}-\ldots \qquad \left[\frac{a}{x}>1\right].$$

602.8. $\ln\left(\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right)=$

$$=-\ln\frac{2a}{x}+\frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{x^6}{a^6}+\ldots \qquad \left[\frac{a}{x}>1\right],$$

$$=-\ln\left(\frac{a}{x}+\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right).$$ [См. **710.**]

603.1. $$\ln|\sin x|=\ln|x|-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\ldots-\frac{2^{2n-1}B_n x^{2n}}{n(2n)!}-\ldots \qquad [x^2<\pi^2].$$

(Интегрируя **415.04.** См. **490.1** и **45.**)

603.2. $$\ln|\sin x|=-\ln 2-\cos 2x-\frac{\cos 4x}{2}-\frac{\cos 6x}{3}-\ldots \qquad [0<x^2<\pi^2].$$

603.3. $$\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\ldots-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!}-\ldots$$

$\left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right]$. (Интегрируя **415.03.** См. **480.1** и **45.**)

603.4. $$\ln|\cos x|=-\ln 2+\cos 2x-\frac{\cos 4x}{2}+\frac{\cos 6x}{3}-\ldots \qquad [0<x^2<\pi^2/4].$$

603.5. $\ln\cos x=$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sin^2 x+\frac{\sin^4 x}{2}+\frac{\sin^6 x}{3}+\frac{\sin^8 x}{4}+\ldots\right] \qquad \left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right].$$

603.6. $$\ln|\operatorname{tg} x|=\ln|x|+\frac{x^2}{3}+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\ldots$$

$$\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!}+\ldots \qquad \left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right].$$

[См. **415.06, 432.10** и **45.**]

604. $\ln(x+iy)=\ln r+i(\theta+2\pi k)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=x/r$, $\sin\theta=y/r$, k — целое число или 0, r — положительно, $i=\sqrt{-1}$.

604.05. $x+iy=re^{i(\theta+2\pi k)}$ [θ в радианах]. [См. **604.**]

604.1. $\ln(-1)=\ln 1+(2k+1)\pi i=(2k+1)\pi i.$ [См. **409.03.**]

605. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0.$ [См. **72.**]