Интегралы, содержащие $r=(x^2+a^2)^{1/2}$

Здесь всюду $r>0$.

625. $\int \ln(x+r)\,dx = x\ln(x+r)-r$. [См. 730.]

625.1. $\int x\ln(x+r)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)\ln(x+r)-\frac{xr}{4}$. [См. 730.1.]

625.2. $\int x^2\ln(x+r)\,dx=\frac{x^3}{3}\ln(x+r)-\frac{r^3}{9}+\frac{a^2r}{3}$. [См. 730.2.]

625.3. $\int x^3\ln(x+r)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3a^4}{32}\right)\ln(x+r)-\frac{x^3r}{16}+\frac{3}{32}a^2xr$.
[См. 730.3.]

625.4. $\int x^4\ln(x+r)\,dx=\frac{x^5}{5}\ln(x+r)-\frac{r^5}{25}+\frac{2}{15}a^2r^3-\frac{a^4r}{5}$.
[См. 730.4.

625.9. $\int x^p\ln(x+r)\,dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(x+r)-\frac{1}{p+1}\int\frac{x^{p+1}\,dx}{r}$
$[p\neq-1]$. [См. 201.01—207.01 и 730.9.]

626.1. $\int\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right)dx=$

$$=\frac{x}{a}-\frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7}+\ldots \qquad [x^2<a^2].$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2x}{a}\right)^2-\frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4^3}\frac{a^4}{x^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6^3}\frac{a^6}{x^6}+\ldots \qquad [x/a>1].$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{2x}{a}\right|\right)^2+\frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4^3}\frac{a^4}{x^4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6^3}\frac{a^6}{x^6}-\ldots$$

$[x/a<-1]$. [См. 731.1.]

626.2. $\int\frac{\ln(x+r)}{x^2}dx=-\frac{\ln(x+r)}{x}-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$, где $r=(x^2+a^2)^{1/2}$.
[См. 731.2.]

626.3. $\int\frac{\ln(x+r)}{x^3}dx=-\frac{\ln(x+r)}{2x^2}-\frac{r}{2a^2x}$. [См. 731.3.]

626.9. $\int\frac{\ln(x+r)}{x^p}dx=-\frac{\ln(x+r)}{(p-1)x^{p-1}}+\frac{1}{p-1}\int\frac{dx}{x^{p-1}r}$ $[p\neq1]$.

[См. 221.01—226.01 и 731.9.]