

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

650.01. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

650.02.
$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} & [x > 0], \\ &= -\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} & [x < 0]. \end{aligned}$$

650.03. $\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}.$ 650.05. $\operatorname{sech} x = 1/\operatorname{ch} x.$

650.04. $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x/\operatorname{ch} x.$ 650.06. $\operatorname{csch} x = 1/\operatorname{sh} x.$

650.07. $\operatorname{th}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1.$

650.08. $\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1.$

650.09. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$

650.10. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x.$

650.11. $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$

651.01. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$

651.02. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$

651.03. $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y).$

651.04. $2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y).$

651.05. $2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y).$

651.06. $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$

651.07. $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \operatorname{ch} \frac{x+y}{2}.$

651.08. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$

651.09. $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}.$

$$651.10. \quad \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}(x+y) \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y.$$

$$651.11. \quad \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}(x+y) \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

$$651.12. \quad \operatorname{csch}^2 x - \operatorname{sech}^2 x = \operatorname{csch}^2 x \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$651.13. \quad (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n = \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx.$$

$$651.14. \quad \frac{1}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$652.12. \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

$$652.13. \quad \operatorname{sh} 3x = 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x.$$

$$652.22. \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1.$$

$$652.23. \quad \operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x.$$

$$652.3. \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1).$$

$$652.4. \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1).$$

$$652.5. \quad \operatorname{sh} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x - 1)} \quad [x > 0],$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x - 1)} \quad [x < 0].$$

$$652.6. \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x + 1)}.$$

$$653.1. \quad \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

$$653.2. \quad \operatorname{th} \left(\frac{x \pm y}{2} \right) = \frac{\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y}.$$

$$653.3. \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

$$653.4. \quad \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$$

$$653.5. \quad \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}.$$

$$653.6. \quad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}.$$

$$653.7. \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \operatorname{cth} x}.$$

$$653.8. \quad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}.$$

$$654.1. \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\ln^{-1} x - \frac{1}{\ln^{-1} x} \right), \quad \text{где } \ln^{-1} x = e^x.$$

Такое обозначение напоминает, что значения этой величины могут быть получены обратной интерполяцией из таблицы натуральных логарифмов, чтобы не пользоваться рядом 550, медленно сходящимся при больших x . Обратную интерполяцию можно производить и по таблице десятичных логарифмов, если воспользоваться тождеством $\ln^{-1} x = = \lg^{-1} (0,4343 x)$.

$$654.2. \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\ln^{-1} x + \frac{1}{\ln^{-1} x} \right).$$

(См. примечание к 654.1.)

$$654.3. \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$$654.4. \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x. \quad 654.5. \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

$$654.6. \quad \operatorname{sh}(ix) = i \sin x. \quad 654.7. \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos x.$$

$$654.8. \quad \operatorname{th}(ix) = i \operatorname{tg} x.$$

$$655.1. \quad \operatorname{sh}(x \pm iy) = \operatorname{sh} x \cos y \pm i \operatorname{ch} x \sin y.$$

$$655.2. \quad \operatorname{ch}(x \pm iy) = \operatorname{ch} x \cos y \pm i \operatorname{sh} x \sin y.$$

$$655.3. \quad \operatorname{th}(x \pm iy) = \frac{\operatorname{sh} 2x \pm i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}.$$

$$655.4. \quad \operatorname{cth}(x \pm iy) = \frac{\operatorname{sh} 2x \mp i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}.$$

$$656.1. \quad \operatorname{sh} 0 = 0. \quad 656.2. \quad \operatorname{ch} 0 = 1. \quad 656.3. \quad \operatorname{th} 0 = 0.$$

$$657.1. \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$657.2. \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$657.3. \quad \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 - \\ - \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} + \dots$$

$$\left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}; \text{ см. 45} \right].$$

$$657.4. \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots \\ \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{(2n)!} B_n x^{2n-1} + \dots \quad [x^2 < \pi^2; \text{ см. 45}].$$

$$657.5. \quad \operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5}{4!} x^4 - \frac{61}{6!} x^6 + \frac{1385}{8!} x^8 - \dots \\ \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} E_n x^{2n} + \dots \quad [x^2 < \frac{\pi^2}{4}; \text{ см. 45}].$$

$$657.6. \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \dots \\ \dots + \frac{2(-1)^n (2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} + \dots \quad [x^2 < \pi^2; \text{ см. 45}].$$

658.1. При x больших положительных

$$\operatorname{th} x = 1 - 2(e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \dots).$$

При x отрицательных, воспользоваться формулой

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

658.2. При x больших положительных

$$\operatorname{cth} x = 1 + 2(e^{-2x} + e^{-4x} + e^{-6x} + \dots).$$

При x отрицательных воспользоваться формулой

$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x.$$

658.3. При x больших положительных

$$\operatorname{sch} x = 2(e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - \dots).$$

При x отрицательных, воспользоваться формулой

$$\operatorname{sch}(-x) = \operatorname{sch} x.$$

658.4. При x больших положительных

$$\operatorname{csch} x = 2(e^{-x} + e^{-3x} + e^{-5x} + \dots).$$

При x отрицательных воспользоваться формулой

$$\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x.$$

Гиперболические функции — Производные

$$667.1. \quad \frac{d \operatorname{sh} x}{dx} = \operatorname{ch} x. \quad 667.3. \quad \frac{d \operatorname{th} x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x.$$

$$667.2. \quad \frac{d \operatorname{ch} x}{dx} = \operatorname{sh} x. \quad 667.4. \quad \frac{d \operatorname{cth} x}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x.$$

$$667.5. \quad \frac{d \operatorname{sech} x}{dx} = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x.$$

$$667.6. \quad \frac{d \operatorname{csch} x}{dx} = -\operatorname{csch} x \operatorname{cth} x.$$