Гиперболические функции — Интегралы

670. Интегралы, содержащие тригонометрические функции, часто можно преобразовать в соответствующие интегралы, содержащие гиперболические функции, заменяя x на ix и пользуясь формулами:

$$\sin(ix) = i\,\mathrm{sh}\,x,\quad \cos(ix) = \mathrm{ch}\,x,\quad \mathrm{tg}\,(ix) = i\,\mathrm{th}\,x \text{ и т. д.}$$

[См. **408.10—15.**]

Эта замена бывает полезна и в других видах формул.

Интегралы, содержащие sh x

671.10. $\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x.$

671.101. $\int \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\,dx = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$

671.11. $\int x\,\mathrm{sh}\,x\,dx = x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x.$

671.12. $\int x^2\,\mathrm{sh}\,x\,dx = (x^2+2)\,\mathrm{ch}\,x - 2x\,\mathrm{sh}\,x.$

671.13. $\int x^3\,\mathrm{sh}\,x\,dx = (x^3+6x)\,\mathrm{ch}\,x - (3x^2+6)\,\mathrm{sh}\,x.$

671.19. $\int x^p\,\mathrm{sh}\,x\,dx = x^p\,\mathrm{ch}\,x - p\int x^{p-1}\,\mathrm{ch}\,x\,dx.$ [См. **677.1.**]

671.20. $\int \mathrm{sh}^2\,x\,dx = \frac{\mathrm{sh}\,2x}{4} - \frac{x}{2}.$

671.21. $\int x\,\mathrm{sh}^2\,x\,dx = \frac{x\,\mathrm{sh}\,2x}{4} - \frac{\mathrm{ch}\,2x}{8} - \frac{x^2}{4}.$

671.30. $\int \mathrm{sh}^3\,x\,dx = \frac{\mathrm{ch}^3 x}{3} - \mathrm{ch}\,x.$

671.40. $\int \mathrm{sh}^4\,x\,dx = \frac{\mathrm{sh}\,4x}{32} - \frac{\mathrm{sh}\,2x}{4} + \frac{3x}{8}.$

671.90. $\int \mathrm{sh}^p\,x\,dx = \frac{1}{p}\,\mathrm{sh}^{p-1}x\,\mathrm{ch}\,x - \frac{p-1}{p}\int \mathrm{sh}^{p-2}\,x\,dx.$

672.11. $\int \frac{\mathrm{sh}\,x}{x}\,dx = x + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} + \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$

672.12. $\int \frac{\mathrm{sh}\,x}{x^2}\,dx = -\frac{\mathrm{sh}\,x}{x} + \int \frac{\mathrm{ch}\,x}{x}\,dx.$ [См. **678.11.**]

672.21. $\int \frac{\mathrm{sh}^2 x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{ch}\,2x}{2x}\,d(2x).$ [См. **678.11.**]

673.10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| = -\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch} x+1}{\operatorname{ch} x-1}.$

673.11. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh} x} = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{7x^5}{3\cdot 5\cdot 5!} - \frac{31x^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \frac{127x^9}{3\cdot 5\cdot 9!} - \ldots$

$\ldots + (-1)^n \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n x^{2n+1} + \ldots$ [$x^2 < \pi^2$. См. **45**].

673.19. $\int \frac{x^p dx}{\operatorname{sh} x}$. Разложить $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ согласно **657.6,** умножить на x^p и интегрировать [$p \neq 0$].

673.20. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\operatorname{cth} x.$

673.21. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -x \operatorname{cth} x + \ln|\operatorname{sh} x|.$

673.30. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x} = \int \operatorname{csch}^3 x\, dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|.$

673.40. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x} = \operatorname{cth} x - \frac{\operatorname{cth}^3 x}{3}.$

673.90. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^p x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x} - \frac{p-2}{p-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{p-2} x}$ [$p > 1$].

675. $\int \operatorname{sh} mx \operatorname{sh} nx\, dx = \frac{\operatorname{sh}(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\operatorname{sh}(m-n)x}{2(m-n)}$

[$m^2 \neq n^2$; при $m^2 = n^2$ см. **671.20**].