VIII.

ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

700. $\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch} \sqrt{x^2+1}.$

При положительном x берется положительное значение Arch, при отрицательном x — его отрицательное значение.

700.1. $\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arcsch} \frac{1}{x} =$

$$= -\operatorname{Arsh}(-x) = \ln\{x+\sqrt{x^2+1}\}.$$

[См. **602.1** и **706.**]

701. $\operatorname{Arch} x = \pm \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2-1} = \pm \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} =$

$$= \operatorname{Arsech} \frac{1}{x} = \pm \ln\{x+\sqrt{x^2-1}\}$$

$[x>1]$. [См. **602.3** и **707.**]

702. $\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arcth} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $\qquad [x^2<1]$. [См. **708.**]

703. $\operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arth} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ $\qquad [x^2>1]$. [См. **709.**]

704. $\operatorname{Arsech} x = \pm \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)$ $\qquad [0<x<1]$. [См. **710.**]

705. $\operatorname{Arcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right).$ [См. **711.**]

706. $\operatorname{Arsh} x = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots$ $\qquad [x^2<1],$

$$= \ln(2x) + \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots$$

$[x>1],$

$$= -\ln|2x| - \frac{1}{2\cdot 2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} + \ldots$$

$[x<-1]$. [См. **602.1.**]

707. $$\operatorname{Arch} x = \pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots\right]$$
$[x > 1]$. [См. **602.3** и **602.4.**]

708. $$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \quad [x^2 < 1].$$ [См. **601.2.**]

709. $$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots \quad [x^2 > 1].$$ [См. **601.3.**]

710. $$\operatorname{Arsech} x = \pm\left[\ln\frac{2}{x} - \frac{1}{2\cdot 2}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 - \ldots\right]$$
$[0 < x < 1]$. [См. **602.7** и **602.8.**]

711. $$\operatorname{Arcsch} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7x^7} + \ldots \quad [x^2 > 1],$$
$$= \ln\frac{2}{x} + \frac{1}{2\cdot 2}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 - \ldots$$
$[0 < x < 1]$,
$$= -\ln\left|\frac{2}{x}\right| - \frac{1}{2\cdot 2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 + \ldots$$
$[-1 < x < 0]$. [См. **602.5.**]

720. $$\operatorname{Arsh}(\pm x + iy) = \pm(-1)^n \operatorname{Arch}\frac{s+t}{2} + $$
$$+ i(-1)^n \arcsin\frac{2y}{s+t} + in\pi,$$

здесь берутся положительные значения $\operatorname{Arch}\frac{s+t}{2}$, n — целое число или 0, x положительно, y положительно или отрицательно.
Значения s и t см. **720.1** и **720.2.**

720.1. $s = \sqrt{(1+y)^2 + x^2}$ (положительное значение корня).

720.2. $t = \sqrt{(1-y)^2 + x^2}$ (положительное значение корня).

Заметим, что при $x = 0$ и $y > 1$, $t = y - 1$ и $s + t = 2y$.
Если $x = 0$ и $y < 1$, $t = 1 - y$ и $s + t = 2$.
Иначе:

720.3а. $\operatorname{Arsh} A = \ln(\pm\sqrt{1+A^2} + A) + i2k\pi$
или

720.3б. $\operatorname{Arsh} A = -\ln(\pm\sqrt{1+A^2} - A) + i2k\pi$,

где A может быть комплексной величиной, а k — целое число или 0.

О квадратном корне из комплексной величины см. **58**, а о логарифме см. **604**. Формулы **720.3а** и **720.3б** тождественны.

721.1. $\operatorname{Arch}(x+iy)=\pm\left(\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}+i\arccos\frac{2x}{p+q}+i2k\pi\right).$

721.2. $\operatorname{Arch}(x-iy)=\pm\left(\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}-i\arccos\frac{2x}{p+q}+i2k\pi\right),$

здесь надо брать положительное значение $\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}$; x положительно или отрицательно, y положительно.

721.3. $p=\sqrt{(1+x)^2+y^2}$ (положительное значение корня).

721.4. $q=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$ (положительное значение корня).

Иначе:

721.5a. $\operatorname{Arch}A=\pm\ln(A+\sqrt{A^2-1})+i2k\pi$

или

721.5б. $\operatorname{Arch}A=\mp\ln(A-\sqrt{A^2-1})+i2k\pi.$

(См. примечание к **720.3.**)

722.1. $\operatorname{Arth}(x+iy)=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}+$

$$+\frac{i}{2}\left\{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{1+x}{y}-\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}\right\}.$$

Иначе:

722.2. $\operatorname{Arth}(x+iy)=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}+\frac{i}{2}\operatorname{arctg}\frac{2y}{1-x^2-y^2}+i\pi k,$

где k есть нуль или целое число, а арктангенс берется в квадранте, определяемом знаками числителя и знаменателя (а не в смысле главного значения).

722.3. $\operatorname{Arth}(x+iy)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x+iy}{1-x-iy}.$ [См. **604.**]