Эллиптические функции — Производные

768.1. $\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$

768.2. $\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.$

768.3. $\frac{d}{du} \operatorname{dn} u = - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$

Эллиптические функции—Интегралы

770. *Эллиптический интеграл первого рода*

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \qquad [k^2 < 1],$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}} \qquad [x = \sin \varphi].$$

[См. 750.]

771. *Эллиптический интеграл второго рода*

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \qquad [x = \sin \varphi].$$

772. *Эллиптический интеграл третьего рода*

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{(1 + n x^2) \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}} \qquad [x = \sin \varphi].$$

n называется *параметром*.

Таблицы значений эллиптических интегралов см. [27], [28].

Полные эллиптические интегралы

773.1. $$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k^4 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6 + \ldots\right) \quad [k^2 < 1].$$

773.2. $$K = \frac{\pi}{2}(1+m)\left[1 + \frac{1^2}{2^2}m^2 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}m^4 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}m^6 + \ldots\right],$$

где $m = (1-k')/(1+k')$.

Этот ряд сходится быстрее, чем **773.1**, поскольку $m^2 < k^2$.

773.3. $$K = \ln\frac{4}{k'} + \frac{1^2}{2^2}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2}\right)k'^2 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4}\right)k'^4 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{2}{5\cdot 6}\right)k'^6 + \ldots,$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$.

774.1. $$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}k^4 - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6 - \ldots\right) \quad [k^2 < 1].$$

774.2. $$E = \frac{\pi}{2(1+m)}\left[1 + \frac{m^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2\cdot 4^2}m^4 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}m^6 + \ldots\right],$$

где $m = (1-k')/(1+k')$.

Этот ряд сходится быстрее, чем **774.1**, поскольку $m^2 < k^2$.

774.3. $$E = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{1}{1\cdot 2}\right)k'^2 + \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4}\right)k'^4 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6}\right)k'^6 + \ldots$$

775.
$$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$
$$=\frac{2\varphi}{\pi}K-\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{2}A_2k^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}A_4k^4+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}A_6k^6+\ldots\right),$$
где
$$A_2=\frac{1}{2},\qquad A_4=\frac{3}{2\cdot4}+\frac{1}{4}\sin^2\varphi,$$
$$A_6=\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{5}{4\cdot6}\sin^2\varphi+\frac{1}{6}\sin^4\varphi,$$
$$A_8=\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{5\cdot7}{4\cdot6\cdot8}\sin^2\varphi+\frac{7}{6\cdot8}\sin^4\varphi+\frac{1}{8}\sin^6\varphi,$$
а K находится по формуле **773** или из таблиц.

776.
$$F(\varphi,\ k)=\varphi+\frac{1}{2}v_2k^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}v_4k^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}v_6k^6+\ldots,$$
где
$$v_{2n}=\int_0^{\varphi}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$
[См. **430.**]

777.
$$E(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$
$$=\frac{2\varphi}{\pi}E+\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{2}A_2k^2+\frac{1}{2\cdot4}A_4k^4+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}A_6k^6+\ldots\right),$$
где A_2, $A_4,\ldots$ те же, что и в формуле **775**, а E может быть получено из формулы **774** или из таблиц.

780.1.
$$\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+k'^2x^2}}=\mathrm{tn}^{-1}(x,\ k)\ ^{*)}=F(\mathrm{arctg}\,x,\ k)$$
$[x>0]$.

781.01.
$$\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}}=\frac{1}{a}\,\mathrm{sn}^{-1}\left(\frac{x}{b},\ \frac{b}{a}\right)^{*)}=\frac{1}{a}F(\varphi,\ k)$$
$$\left[\varphi=\arcsin\frac{x}{b},\quad k=\frac{b}{a}\right],\ [0<x<b<a].$$

---

*) Здесь через $\mathrm{sn}^{-1}(x)$, $\mathrm{tn}^{-1}(x)$ обозначены функции, обратные $\mathrm{sn}\,x$ и $\mathrm{tn}\,x$ (область изменения от 0 до K). (*Прим. ред.*)

781.02. $$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\{K(k)-F(\varphi,\ k)\}$$

$$\left[\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right),\quad k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right],\quad [0<b<x<a].$$

$K(k)=F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)$ — полный эллиптический интеграл. Как обычно, интеграл от x_1 до x_2 получается как разность интегралов от b до x_2 и от b до x_1.

781.03. $$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}\,\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\{K(k)-F(\varphi,\ k)\}$$

$$[\varphi=\arcsin\ (a/x),\ k=b/a],\quad [0<b<a<x].$$

781.04. $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{1}{a}\ \mathrm{tn}^{-1}\left\{\frac{x}{b},\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right\}^{*)} = \frac{1}{a}F(\varphi,\ k)$$

$$\left[\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{b},\ k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right],\ [0<b<a;\ 0<x].$$

781.05. $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{K(k)-F(\varphi,\ k)\}$$

$$\left[\varphi=\arccos\ \frac{x}{b},\ k=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right],\ [0<x<b].$$

781.06. $$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}F(\varphi,\ k)$$

$$\left[\varphi=\arccos\ \frac{b}{x},\ k=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right],\ [0<b<x;\ 0<a].$$

781.11. $$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{b^2-x^2}} = aF(\varphi,\ k)-aE(\varphi,\ k)$$

$$[\varphi=\arcsin\ (x/b),\ k=b/a],\quad [0<x<b<a].$$

781.12. $$\int_b^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{x^2-b^2}} = aE\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)-aE(\varphi,\ k)$$

$$\left[\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b^2}},\ k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right],\quad [0<b<x<a].$$

781.13. $$\int_a^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}\,\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,\sqrt{x^2-b^2}}{x} + aK(k) - aF(\varphi,\ k) - aE\left(\frac{\pi}{2},\ k\right) + aE(\varphi,\ k)$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{a}{x},\quad k = \frac{b}{a}\right],\quad [0 < b < a < x].$$

781.14. $$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} - aE(\varphi,\ k)$$
$$\left[\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{b},\ k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right],\quad [0 < x;\ 0 < b < a].$$

781.15. $$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{b^2-x^2}} = \sqrt{a^2+b^2}\left[E\left(\frac{\pi}{2},\ k\right) - E(\varphi,\ k)\right] - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[K(k) - F(\varphi,\ k)\right]$$
$$\left[\varphi = \arccos\frac{x}{b},\quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right],\quad [0 < x < b].$$

781.16. $$\int_b^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{x^2-b^2}}{x} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}F(\varphi,\ k) - \sqrt{a^2+b^2}\,E(\varphi,\ k)$$
$$\left[\varphi = \arccos\frac{b}{x},\ k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right],\quad [0 < b < x;\ 0 < a].$$

781.21. $$\int_0^x \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{b^2-x^2}}\,dx = aE(\varphi,\ k)\quad [0 < x < b < a],$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{x}{b},\ k = \frac{b}{a}\right].$$

781.22. $$\int_0^x \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = aE(\varphi,\ k) - \frac{a^2-b^2}{a}F(\varphi,\ k)$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{x}{b},\ k = \frac{b}{a}\right],\quad [0 < x < b < a].$$

781.23. $$\int_0^x \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} + aF(\varphi,\ k) - aE(\varphi,\ k)$$
$$\left[\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{b},\ k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right] \quad [0<x;\ 0<b<a].$$

781.24. $$\int_b^x \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{x^2-b^2}}\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{x^2-b^2}}{x} + \sqrt{a^2+b^2}\,\{F(\varphi,\ k) - E(\varphi,\ k)\}$$
$$\left[\varphi = \arccos\frac{b}{x},\ k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] \quad [0<b<x;\ 0<a].$$

781.51. $$\int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}}{3} +$$
$$+ \frac{(2+k^2)\,b^3}{3k^3}F(\varphi,\ k) - \frac{2\,(1+k^2)\,b^3}{3k^3}E(\varphi,\ k)$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{x}{b},\ k = \frac{b}{a}\right].$$

781.61. $$\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}}{3} +$$
$$+ \left(\frac{b^3}{3k} + \frac{2b^3}{3k^3} - a^3\right)F(\varphi,\ k) + \left(a^3 + ab^2 - \frac{2b^3}{3k} - \frac{2b^3}{3k^3}\right)E(\varphi,\ k)$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{x}{b},\ k = \frac{b}{a}\right].$$

782.01. $$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^u \operatorname{sn}^2 u\,du = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{F(\varphi,\ k) - E(\varphi,\ k)\} \qquad [x = \sin\varphi].$$

782.02. $$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^u \operatorname{cn}^2 u\,du = \int_0^x \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}\,dx =$$
$$= \frac{E(\varphi,\ k)}{k^2} - \frac{1-k^2}{k^2}F(\varphi,\ k) \qquad [x = \sin\varphi].$$

782.03. $$\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{u} \operatorname{tn}^2 u\, du = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1-k^2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \frac{E(\varphi, k)}{1-k^2}.$$

782.04. $$\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2}\operatorname{tg}\varphi + F(\varphi, k) - \frac{E(\varphi, k)}{1-k^2}.$$

782.05. $$\int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + F(\varphi, k) - E(\varphi, k).$$

782.06. $$\int_0^{\varphi} \operatorname{tg}^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + F(\varphi, k) - 2E(\varphi, k).$$

785.1. $$\int \operatorname{sn} u\, du = -\frac{1}{k}\operatorname{Arch}\left(\frac{\operatorname{dn} u}{k'}\right).$$

785.2. $$\int \operatorname{cn} u\, du = \frac{1}{k}\arccos(\operatorname{dn} u).$$

785.3. $$\int \operatorname{dn} u\, du = \arcsin(\operatorname{sn} u) = \operatorname{am} u.$$

786.1. $$\int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}\right).$$

786.2. $$\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'}\ln\left(\frac{k'\operatorname{sn} u + \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right).$$

786.3. $$\int \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{k'}\operatorname{arctg}\left(\frac{k'\operatorname{sn} u - \operatorname{cn} u}{k'\operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u}\right).$$

787.1. $$\int_0^{u} \operatorname{sn}^2 u\, du = \frac{1}{k^2}\{u - E(\operatorname{am} u, k)\}.$$

787.2. $$\int_0^{u} \operatorname{cn}^2 u\, du = \frac{1}{k^2}\{E(\operatorname{am} u, k) - k'^2 u\}.$$

787.3. $$\int_0^{u} \operatorname{dn}^2 u\, du = E(\operatorname{am} u, k).$$

787.4. $$\int_0^{u} \operatorname{tn}^2 u\, du = \frac{1}{k'^2}\{\operatorname{dn} u\operatorname{tn} u - E(\operatorname{am} u, k)\}.$$

788.1.*) $\int \operatorname{sn}^{-1} x\, dx = x \operatorname{sn}^{-1} x + \frac{1}{k} \operatorname{ch}\left[\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{k'}\right].$

788.2. $\int \operatorname{cn}^{-1} x\, dx = x \operatorname{cn}^{-1} x - \frac{1}{k} \arccos \sqrt{k'^2 + k^2x^2}.$

788.3. $\int \operatorname{dn}^{-1} x\, dx = x \operatorname{dn}^{-1} x - \arcsin\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{k}\right].$

789.1. $\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k}(E-K).$

789.2. $\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{1}{k}\left(\frac{E}{k'^2} - K\right).$

---

*) См. подстр. прим. на стр. 151.