Числа Бернулли и числа Эйлера

45.

Числа Бернулли	$\lg B_n$	Числа Эйлера	$\lg E_n$
$B_1=\frac{1}{6}$	$\bar{1},221\,8487$	$E_1=1$	0
$B_2=\frac{1}{30}$	$\bar{2},522\,8787$	$E_2=5$	$0,698\,9700$
$B_3=\frac{1}{42}$	$\bar{2},376\,7507$	$E_3=61$	$1,785\,3298$
$B_4=\frac{1}{30}$	$\bar{2},522\,8787$	$E_4=1\,385$	$3,141\,4498$
$B_5=\frac{5}{66}$	$\bar{2},879\,4261$	$E_5=50\,521$	$4,703\,4719$
$B_6=\frac{691}{2730}$	$\bar{1},403\,3154$	$E_6=2\,702\,765$	$6,431\,8083$
$B_7=\frac{7}{6}$	$0,066\,9468$	$E_7=199\,360\,981$	$8,299\,6402$
$B_8=\frac{3617}{510}$	$0,850\,7783$		
$B_9=\frac{43\,867}{798}$	$1,740\,1350$		
$B_{10}=\frac{174611}{330}$	$2,723\,5577$		
$B_{11}=\frac{854513}{138}$	$3,791\,8396$		

Существуют различные обозначения для чисел Бернулли и Эйлера. Принятые здесь обозначения определяются формулами **47.1** и **47.4**.

46.1. $$E_n=\frac{(2n)!}{(2n-2)!\,2!}E_{n-1}-\frac{(2n)!}{(2n-4)!\,4!}E_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1},$$

принимая $0!=1$ и $E_0=1$.

46.2. $$B_n=\frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left[\frac{(2n-1)!}{(2n-2)!\,1!}E_{n-1}-\right.$$ $$\left.-\frac{(2n-1)!}{(2n-4)!\,3!}E_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\right].$$

47.1. $$B_n=\frac{(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\left[1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots\right].$$

47.2. $$B_n=\frac{(2n)!}{\pi^{2n}(2^{2n-1}-1)}\left[1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\ldots\right].$$

47.3. $$B_n=\frac{2\,(2n)!}{\pi^{2n}(2^{2n}-1)}\left[1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\ldots\right].$$

47.4. $E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left[1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \ldots\right].$

48.001. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty.$

48.002. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \pi^2 B_1 = \frac{\pi^2}{6} =$ (См. **45.**)

$= \zeta(2) = 1{,}64493\,40668.$

48.003. $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \zeta(3) = 1{,}20205\,69032.$

48.004. $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{3} B_2 = \frac{\pi^4}{90} =$ (См. **45.**)

$= \zeta(4) = 1{,}08232\,32337.$

48.005. $1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \ldots = \zeta(5) = 1{,}03692\,77551.$

48.006. $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots = \frac{2\pi^6}{4^5} B_3 = \frac{\pi^6}{945} =$ (См. **45.**)

$= \zeta(6) = 1{,}01734\,30620.$

48.007. $1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \ldots = \zeta(7) = 1{,}00834\,92774.$

48.008. $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \ldots = \frac{\pi^8}{315} B_4 = \frac{\pi^8}{9450} =$ (См. **45.**)

$= \zeta(8) = 1{,}00407\,73562.$

48.08. $1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} B_n$

[n — целое, положительное]. (См. **45, 47.1.**)

48.09. $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots = \zeta(p)$, дзета-функция Римана.

Таблицу численных значений этой функции см. [16].

48.11. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = \infty.$

48.12. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{3\pi^2}{4} B_1 = \frac{\pi^2}{8}.$ (См. **45.**)

48.13. $1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{7}{8}\zeta(3) = 1{,}05179\,97903.$

(См. **48.09.**)

48.14. $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{5\pi^4}{16}B_2=\frac{\pi^4}{96}=\frac{15}{16}\zeta(4)=$ (См. **45.**)
$=1{,}01467\,80316.$

48.18. $1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\ldots=\frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2\cdot(2n)!}B_n.$ (См. **45, 47.3.**)

48.19. $1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\zeta(p).$ (См. **48.09.**)

48.21. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2.$ (См. **601.01.**)

48.22. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{2}B_1=\frac{\pi^2}{12}.$ (См. **45.**)

48.23. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\zeta(3)=0{,}90154\,26774.$
(См. **48.09.**)

48.24. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{(2^3-1)\pi^4}{4!}B_2=\frac{7\pi^4}{720}=$ (См. **45.**)
$=\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\zeta(4)=0{,}94703\,28295.$

48.28. $1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=\frac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{(2n)!}B_n.$ (См. **45, 47.2.**)

48.29. $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p).$ (См. **48.09.**)
(Для $p=1$ см. **48.21.**)

48.31. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}E_0=\frac{\pi}{4}.$ (Согласно **46.1** $E_0=1.$)

48.32. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots=G=0{,}91596\,55942.$

48.33. $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{32}E_1=\frac{\pi^3}{32}.$ (См. **45.**)

48.34. $1-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{7^4}+\ldots=0{,}98894\,455.$

48.36. $1-\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{7^6}+\ldots=0{,}99868\,522.$

48.38. $1-\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}-\frac{1}{7^8}+\ldots=0{,}999850.$

48.39. $1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots=\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}E_n.$ [См. **45, 47.4.**]

Обращение рядов

50. Пусть известен ряд

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + \ldots, \qquad [a \neq 0],$$

тогда коэффициентами ряда

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + \ldots$$

будут

$$A = \frac{1}{a}, \qquad B = -\frac{b}{a^3}, \qquad C = \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac),$$

$$D = \frac{1}{a^7}(5abc - a^2d - 5b^3),$$

$$E = \frac{1}{a^9}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c),$$

$$F = \frac{1}{a^{11}}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5),$$

$$G = \frac{1}{a^{13}}(8a^4bf + 8a^4ce + 4a^4d^2 + 120a^2b^3d + 180a^2b^2c^2 + 132b^6 - a^5g - 36a^3b^2e - 72a^3bcd - 12a^3c^3 - 330ab^4c).$$

Степени $S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots$

51.1. $$S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + 2(af + be + cd)x^5 + \ldots$$

51.2. $$S^{1/2} = a^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\frac{c}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{1}{4}\frac{bc}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{1}{4}\frac{bd}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{c^2}{a^2} + \frac{3}{16}\frac{b^2c}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

51.3. $$S^{-1/2} = a^{-1/2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{3}{8}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{3}{4}\frac{bc}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{5}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{3}{4}\frac{bd}{a^2} + \frac{3}{8}\frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{15}{16}\frac{b^2c}{a^3} + \frac{35}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

51.4. $$S^{-1} = a^{-1}\left[1 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3\frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

51.5. $$S^{-2}=a^{-2}\left[1-2\frac{b}{a}x+\left(3\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)x^2+\left(6\frac{bc}{a^2}-2\frac{d}{a}-4\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+\left(6\frac{bd}{a^2}+3\frac{c^2}{a^2}-2\frac{e}{a}-12\frac{b^2c}{a^3}+5\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ldots\right].$$

Корни квадратного уравнения

55.1. Корни $ax^2+bx+c=0$:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}},$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Чтобы избежать потери точности при вычитании, следует пользоваться той из двух формул, которая требует арифметического сложения.

55.2. Если один из корней α вычислен точно, то

$$\beta=-\alpha-\frac{b}{a}\quad\text{или}\quad\beta=\frac{c}{a\alpha}.$$

Квадратные корни из комплексных чисел

58.1. $$\sqrt{x+iy}=\pm\left[\sqrt{\frac{r+x}{2}}+i\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right].$$

58.2. $$\sqrt{x-iy}=\pm\left[\sqrt{\frac{r+x}{2}}-i\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right].$$

Здесь x может быть положительным или отрицательным, y — положительно,

$$r=+\sqrt{x^2+y^2},\qquad i=\sqrt{-1}.$$

Квадратные корни из $(r+x)/2$ и $(r-x)/2$ следует считать положительными.

58.3. Другой метод — представить $x+iy$ в форме

$$re^{i(\theta+2\pi k)}\qquad\text{(см. } \mathbf{604.05}\text{)},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$, а k — целое число или 0. Тогда

$$\sqrt{x+iy}=\sqrt{re^{i\theta}}=\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}=\pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

59.1. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} \\ a_{2p} & a_{2q} \end{vmatrix} \equiv a_{1p}\, a_{2q} - a_{2p}\, a_{1q}.$$

59.2. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix} \equiv a_{1p} \begin{vmatrix} a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix} - a_{1q} \begin{vmatrix} a_{2p} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3r} \end{vmatrix} + a_{1r} \begin{vmatrix} a_{2p} & a_{2q} \\ a_{3p} & a_{3q} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv a_{1p}(a_{2q}\, a_{3r} - a_{3q}\, a_{2r}) - a_{1q}(a_{2p}\, a_{3r} - a_{3p}\, a_{2r}) + \\ + a_{1r}(a_{2p}\, a_{3q} - a_{3p}\, a_{2q}).$$

59.3. Если дана система трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{1p}x + a_{1q}y + a_{1r}z &= u \\ a_{2p}x + a_{2q}y + a_{2r}z &= v, \\ a_{3p}x + a_{3q}y + a_{3r}z &= w, \end{aligned}$$

то

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & a_{1q} & a_{1r} \\ v & a_{2q} & a_{2r} \\ w & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{1p} & u & a_{1r} \\ a_{2p} & v & a_{2r} \\ a_{3p} & w & a_{3r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & u \\ a_{2p} & a_{2q} & v \\ a_{3p} & a_{3q} & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}}.$$

Корни системы линейных уравнений с бо́льшим числом неизвестных, если число уравнений равно числу неизвестных, выражаются аналогичными формулами, если знаменатель отличен от нуля.