X.

БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

800. Дифференциальное уравнение Бесселя имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)u=0.$$

Бесселева функция первого рода $J_n(x)$

Обозначим $\frac{d}{dx}J_n(x)$ через J_n' и т. д.

801.1. $xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1}$.

801.2. $xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}$.

801.3. $2nJ_n = xJ_{n-1} + xJ_{n+1}$.

801.4. $2J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}$.

801.5. $4J_n'' = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}$.

801.6. $\frac{d}{dx}(x^nJ_n) = x^nJ_{n-1}$.

801.7. $\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n) = -x^{-n}J_{n+1}$.

801.82. $J_2 = \frac{2J_1}{x} - J_0$.

801.83. $J_3 = \left(\frac{8}{x^2}-1\right)J_1 - \frac{4J_0}{x}$.

801.84. $J_4 = \left(1-\frac{24}{x^2}\right)J_0 + \frac{8}{x}\left(\frac{6}{x^2}-1\right)J_1$.

801.85. $J_5 = \frac{12}{x}\left(1-\frac{16}{x^2}\right)J_0 + \left(\frac{384}{x^4}-\frac{72}{x^2}+1\right)J_1$.

801.90. $J_0' = -J_1$.

801.91. $J_1' = J_0 - \frac{J_1}{x}$.

801.92. $J_2' = \frac{2J_0}{x} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) J_1.$

801.93. $J_3' = \left(\frac{12}{x^2} - 1\right) J_0 + \left(5 - \frac{24}{x^2}\right) \frac{J_1}{x}.$

801.94. $J_4' = \frac{8}{x} \left(\frac{12}{x^2} - 1\right) J_0 - \left(\frac{192}{x^4} - \frac{40}{x^2} + 1\right) J_1.$

801.95. $J_5' = \left(\frac{960}{x^4} - \frac{84}{x^2} + 1\right) J_0 - \left(\frac{1920}{x^4} - \frac{408}{x^2} + 13\right) \frac{J_1}{x}.$

Таблицы $J_0(x)$ и $J_1(x)$ см. [10, 15; 17, 19з, 20].

802.1. $J_0(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \ldots$

802.21. $J_1(x) = -J_0'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \ldots$

802.22. $J_2(x) = \frac{x^2}{2^2 2!} - \frac{x^4}{2^4 1!3!} + \frac{x^6}{2^6 2!4!} - \frac{x^8}{2^8 3!5!} + \ldots$

802.3. При n целом положительном

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!} \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1 \cdot 2(n+1)(n+2)} - \ldots\right].$$

802.4. При n целом

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

802.5. Если n — не целое положительное число, то в формуле **802.3** заменить $n!$ через $\Pi(n)$. (См. **853.1.**)

802.61. $J_1'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{2^3 1!2!} + \frac{5x^4}{2^5 2!3!} - \frac{7x^6}{2^7 3!4!} + \ldots$

802.62. $J_2'(x) = \frac{x}{4} - \frac{4x^3}{2^4 1!3!} + \frac{6x^5}{2^6 2!4!} - \frac{8x^7}{2^8 3!5!} + \ldots$

802.69. $J_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2^n (n-1)!} - \frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+2} 1!(n+1)!} +$

$$+ \frac{(n+4)x^{n+3}}{2^{n+4} 2!(n+2)!} - \frac{(n+6)x^{n+5}}{2^{n+6} 3!(n+3)!} + \ldots$$

(n целое положительное).

Асимптотические ряды для больших значений x

803.1. $$J_0(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_0(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-Q_0(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$
где

803.11. $$P_0(x)\approx 1-\frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{4!\,(8x)^4}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11^2}{6!\,(8x)^6}+\ldots$$

803.12. $$Q_0(x)\approx -\frac{1^2}{1!\,8x}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2}{5!\,(8x)^5}+\ldots$$

Знак $\approx$ означает асимптотическое равенство.

803.2. $$J_1(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_1(x)\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)-Q_1(x)\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$
где

803.21. $$P_1(x)\approx 1+\frac{1^2\cdot 3\cdot 5}{2!\,(8x)^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 9}{4!\,(8x)^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11\cdot 13}{6!\,(8x)^6}-\ldots$$

Начиная со второго члена знаки чередуются.

803.22. $$Q_1(x)\approx\frac{1\cdot 3}{1!\,8x}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{3!\,(8x)^3}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9\cdot 11}{5!\,(8x)^5}-\ldots$$

803.3. $$J_n(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_n(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-Q_n(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$
где

803.31. $$P_n(x)\approx 1-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8x)^2}+$$
$$+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!\,(8x)^4}-\ldots$$

803.32. $$Q_n(x)\approx\frac{4n^2-1^2}{1!\,8x}-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!\,(8x)^3}+\ldots$$

803.4. $$J_n'(x)=-\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_n^{(1)}(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+Q_n^{(1)}(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

где согласно **801.4**

803.41. $$P_n^{(1)}(x)\approx 1-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2+3\times 5)}{2!\,(8x)^2}+$$
$$+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2+7\times 9)}{4!\,(8x)^4}-\ldots$$

803.42. $$Q_n^{(1)}(x) \approx \frac{4n^2+1\times 3}{1!\,8x} - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2+5\times 7)}{3!\,(8x)^3} + \ldots$$

Закон образования следующих членов очевиден. Следует помнить, что приведенные здесь ряды для больших значений x являются асимптотическими, и существует предел точности, которую они могут дать.

804.01. $$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x.$$

804.03. $$J_{\frac{3}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

804.05. $$J_{\frac{5}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left\{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\sin x - \frac{3}{x}\cos x\right\}.$$

804.21. $$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x.$$

804.23. $$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right).$$

804.25. $$J_{-\frac{5}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left\{\frac{3}{x}\sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\cos x\right\}.$$