Бесселева функция второго рода $Y_n(x)$

Некоторые авторы употребляют вместо $Y_n(x)$ обозначение $N_n(x)$.

805.1. $xY_n' = nY_n - xY_{n+1}$. **805.2.** $xY_n' = -nY_n + xY_{n-1}$.

805.3. $2nY_n = xY_{n-1} + xY_{n+1}$. **805.4.** $2Y_n' = Y_{n-1} - Y_{n+1}$.

805.5. $4Y_n'' = Y_{n-2} - 2Y_n + Y_{n+2}$.

805.6. $\frac{d}{dx}(x^nY_n) = x^nY_{n-1}$.

805.7. $\frac{d}{dx}(x^{-n}Y_n) = -x^{-n}Y_{n+1}$.

805.82. $Y_2 = \frac{2Y_1}{x} - Y_0$. **805.83.** $Y_3 = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right)Y_1 - \frac{4Y_0}{x}$.

805.84. $$Y_4=\left(1-\frac{24}{x^2}\right)Y_0+\frac{8}{x}\left(\frac{6}{x^2}-1\right)Y_1.$$

805.85. $$Y_5=\frac{12}{x}\left(1-\frac{16}{x^2}\right)Y_0+\left(\frac{384}{x^4}-\frac{72}{x^2}+1\right)Y_1.$$

805.90. $$Y_0'=-Y_1.$$ **805.91.** $$Y_1'=Y_0-\frac{Y_1}{x}.$$

805.92. $$Y_2'=\frac{2Y_0}{x}+\left(1-\frac{4}{x^2}\right)Y_1.$$

805.93. $$Y_3'=\left(\frac{12}{x^2}-1\right)Y_0+\left(5-\frac{24}{x^2}\right)\frac{Y_1}{x}.$$

805.94. $$Y_4'=\frac{8}{x}\left(\frac{12}{x^2}-1\right)Y_0-\left(\frac{192}{x^4}-\frac{40}{x^2}+1\right)Y_1.$$

805.95. $$Y_5'=\left(\frac{960}{x^4}-\frac{84}{x^2}+1\right)Y_0-\left(\frac{1920}{x^4}-\frac{408}{x^2}+13\right)\frac{Y_1}{x}.$$

Таблицы $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ см. [10, 15, 17].

806.1. $$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{2}\right)J_0(x)+\frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2}-$$
$$-\frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots,$$

где C — эйлерова постоянная 0,5772157. (См. **851.1.**)

806.2. $$Y_1(x)=\frac{2}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{2}\right)J_1(x)-\frac{2}{\pi x}-$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}\left\{2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p+1}\right\}.$$

806.3. $$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{2}\right)J_n(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}-$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right),$$

где n целое положительное. При $p=0$ последнюю скобку следует положить равной $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

Асимптотические ряды для больших значений x

807.1. $$Y_0(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_0(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+Q_0(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

807.2. $$Y_1(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_1(x)\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+Q_1(x)\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

807.3. $$Y_n(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_n(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+Q_n(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$ [Ряды для P и Q см. **803.**]

807.4. $$Y_n'(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_n^{(1)}(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-Q_n^{(1)}(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

[$P_n^{(1)}(x)$ и $Q_n^{(1)}(x)$ см. в **803.41** и **803.42.**]