Бесселевы функции от мнимого аргумента первого рода $I_n(x)$

808.1. $xI_n' = nI_n + xI_{n+1}$. **808.3.** $2nI_n = xI_{n-1} - xI_{n+1}$.

808.2. $xI_n' = -nI_n + xI_{n-1}$. **808.4.** $2I_n' = I_{n-1} + I_{n+1}$.

808.5. $4I_n'' = I_{n-2} + 2I_n + I_{n+2}$.

808.6. $\frac{d}{dx}(x^n I_n) = x^n I_{n-1}$. **808.7.** $\frac{d}{dx}(x^{-n} I_n) = x^{-n} I_{n+1}$.

808.82. $I_2 = I_0 - \frac{2I_1}{x}$.

808.83. $I_3 = \left(\frac{8}{x^2} + 1\right) I_1 - \frac{4I_0}{x}$.

808.84. $I_4 = \left(\frac{24}{x^2} + 1\right) I_0 - \frac{8}{x}\left(\frac{6}{x^2} + 1\right) I_1$.

808.85. $I_5 = \left(\frac{384}{x^4} + \frac{72}{x^2} + 1\right) I_1 - \frac{12}{x}\left(\frac{16}{x^2} + 1\right) I_0$.

808.90. $I_0' = I_1$.

808.91. $I_1' = I_0 - \frac{I_1}{x}$.

808.92. $I_2' = I_1\left(\frac{4}{x^2} + 1\right) - \frac{2I_0}{x}$.

808.93. $I_3' = \left(\frac{12}{x^2} + 1\right) I_0 - \left(\frac{24}{x^2} + 5\right)\frac{I_1}{x}$.

808.94. $$I_4' = \left(\frac{192}{x^4} + \frac{40}{x^2} + 1\right) I_1 - \frac{8}{x}\left(\frac{12}{x^2} + 1\right) I_0.$$

808.95. $$I_5' = \left(\frac{960}{x^4} + \frac{84}{x^2} + 1\right) I_0 - \left(\frac{1920}{x^4} + \frac{408}{x^2} + 13\right) \frac{I_1}{x}.$$

Таблицы $I_0(x)$ и $I_1(x)$ см. [10, 15, 21].

809.1. $$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \ldots,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

809.2. $$I_1(x) = i^{-1} J_1(ix) = I_0'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \ldots$$

809.3. При n целом положительном

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) =$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!}\left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1\,(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1 \cdot 2\,(n+1)\,(n+2)} + \ldots\right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p! \cdot (n+p)!}.$$

809.4. При n целом

$$I_{-n}(x) = I_n(x).$$

809.5. Если n не целое положительное, то надо в **809.3** заменить $n!$ на $\Pi(n)$.

[См. **853.1**]

Асимптотические ряды для больших значений x

811.1. $$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + \frac{1^2}{1!\,8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \ldots\right].$$

811.2. $$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!\,8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!\,(8x)^2} - \ldots\right].$$

811.3. $$I_n'(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 - \frac{4n^2 + 1 \times 3}{1!\,8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 + 3 \times 5)}{2!\,(8x)^2} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 + 5 \times 7)}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right].$$

Члены ряда 811.3 те же, что и в рядах **803.41** и **803.42**.