Бесселевы функции от мнимого аргумента второго рода $K_n(x)$

814.1. $xK_n' = nK_n - xK_{n+1}$.

814.2. $xK_n' = -nK_n - xK_{n-1}$.

814.3. $2nK_n = xK_{n+1} - xK_{n-1}$.

814.4. $2K_n' = -K_{n-1} - K_{n+1}$.

814.5. $4K_n'' = K_{n-2} + 2K_n + K_{n+2}$.

814.6. $\frac{d}{dx}(x^n K_n) = -x^n K_{n-1}$.

814.7. $\frac{d}{dx}(x^{-n} K_n) = -x^{-n} K_{n+1}$.

814.82. $K_2 = K_0 + \frac{2K_1}{x}$.

814.83. $K_3 = \frac{4K_0}{x} + \left(\frac{8}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.84. $K_4 = \left(\frac{24}{x^2} + 1\right) K_0 + \frac{8}{x}\left(\frac{6}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.85. $K_5 = \frac{12}{x}\left(\frac{16}{x^2} + 1\right) K_0 + \left(\frac{384}{x^4} + \frac{72}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.90. $K_0' = -K_1$.

814.91. $K_1' = -K_0 - \frac{K_1}{x}$.

814.92. $K_2' = -\frac{2K_0}{x} - \left(\frac{4}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.93. $K_3' = -\left(\frac{12}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{24}{x^2} + 5\right) \frac{K_1}{x}$.

814.94. $K_4' = -\frac{8}{x}\left(\frac{12}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{192}{x^4} + \frac{40}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.95. $K_5' = -\left(\frac{960}{x^4} + \frac{84}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{1920}{x^4} + \frac{408}{x^2} + 13\right) \frac{K_1}{x}$.

Таблицы $K_0(x)$ и $K_1(x)$ см. [10, 15, 17, 21].

815.1. $$K_0(x) = -\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) I_0(x) + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \ldots,$$

где $C = 0{,}5772157$ — эйлерова постоянная. (См. 851.1)

815.2. $$K_n(x) = (-1)^{n+1}\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) I_n(x) + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p (n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n} + \frac{(-1)^n}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} \times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right),$$

где n — целое положительное. При $p = 0$ последнюю скобку следует положить равной $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

Следует заметить, что иногда, особенно в более ранней литературе по бесселевым функциям, буквой K обозначается совсем другое выражение.

815.3. При n целом $K_{-n}(x) = K_n(x)$.

815.4. При n нецелом $K_n(x) = \frac{\pi}{2\sin n\pi}\{I_{-n}(x) - I_n(x)\}$.

Асимптотические ряды для больших значений x

816.1. $$K_0(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}\left[1 - \frac{1^2}{1!\,8x} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right].$$

816.2. $$K_n(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}\left[1 + \frac{4n^2-1^2}{1!\,8x} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8x)^2} + \ldots\right].$$

816.3. $$K_n'(x) \approx -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}\left[1 + \frac{4n^2+1\times 3}{1!\,8x} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2+3\times 5)}{2!\,(8x)^2} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2+5\times 7)}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right].$$

[Из **814.4.**]

Нетрудно видеть, как продолжить этот ряд.