Бесселевы функции от аргумента $xi\sqrt{i}$ второго рода

824.1. $\operatorname{ker} x + i \operatorname{kei} x = K_0(x\sqrt{i}).$

824.2. $\operatorname{ker}' x = \dfrac{d}{dx} \operatorname{ker} x$, и т. д.

824.3.
$$\operatorname{ker} x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right) \operatorname{ber} x + \frac{\pi}{4} \operatorname{bei} x - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^8}{(4!)^2} - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{12}}{(6!)^2} + \ldots,$$

где $C = 0{,}5772157$. (См. **851.1.**)

824.4.
$$\operatorname{kei} x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right) \operatorname{bei} x - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber} x + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{10}}{(5!)^2} - \ldots$$

824.5.
$$\operatorname{ker}' x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right) \operatorname{ber}' x - \frac{1}{x} \operatorname{ber} x + \frac{\pi}{4} \operatorname{bei}' x - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1!\,2!} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^7}{3!\,4!} - \ldots$$

824.6.
$$\operatorname{kei}' x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right) \operatorname{bei}' x - \frac{1}{x} \operatorname{bei} x - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber}' x + \frac{1}{2}x - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{2!\,3!} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^9}{4!\,5!} - \ldots$$

825.1. Для больших значений x

$$\operatorname{ker} x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[L_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+M_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

825.2. $$\operatorname{kei} x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[M_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)-\right.$$
$$\left.-L_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

См. 821.3 и 821.4 с подстановкой $-x$ вместо x.

825.3. $$\operatorname{ker}' x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[S_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+T_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

825.4. $$\operatorname{kei}' x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[T_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)-\right.$$
$$\left.-S_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

См. 821.7 и 821.8 с подстановкой $-x$ вместо x.

826.1. При целом положительном n

$$\operatorname{ker}_n x + i\operatorname{kei}_n x = i^{-n} K_n(x\sqrt{i}).$$

826.2. $$\operatorname{ker}_n x = \left(\ln\frac{2}{x}-C\right)\operatorname{ber}_n x + \frac{\pi}{4}\operatorname{bei}_n x +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{n+p}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

826.3. $$\operatorname{kei}_n x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{bei}_n x - \frac{\pi}{4}\operatorname{ber}_n x +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4} -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{n+p}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

826.4. $$\operatorname{ker}'_n x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{ber}'_n x - \frac{\operatorname{ber}_n x}{x} + \frac{\pi}{4}\operatorname{bei}'_n x +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(2p-n)(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n-1}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4} +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{n+p}(n+2p)\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

826.5. $$\operatorname{kei}'_n x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{bei}'_n x - \frac{\operatorname{bei}_n x}{x} - \frac{\pi}{4}\operatorname{ber}'_n x +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(2p-n)(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n-1}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4} -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{n+p}(n+2p)\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

827.1. Для больших значений x при целом положительном n:
$$\operatorname{ker}_n x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}}\left[L_n(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right) +\right.$$
$$\left. + M_n(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

827.2. $$\operatorname{kei}_n x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}}\left[M_n(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right) -\right.$$
$$\left. - L_n(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

[См. **823.3** и **823.4**.]

827.3. $$\operatorname{ker}'_n x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[S_n(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right) + T_n(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

827.4. $$\operatorname{kei}'_n x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[T_n(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right) - S_n(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)\right].$$ [См. **823.7** и **823.8.**]

Нужно заметить, что ряды для больших значений x — это асимптотические разложения, и степень точности, которую они дают, ограничена.

Рекуррентные формулы

828.1. $$\operatorname{ber}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}' x - \operatorname{bei}' x).$$

828.2. $$\operatorname{bei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}' x + \operatorname{bei}' x).$$

828.3. $$\operatorname{ber}_2 x = \frac{2\operatorname{bei}' x}{x} - \operatorname{ber} x.$$ **828.4.** $$\operatorname{bei}_2 x = -\frac{2\operatorname{ber}' x}{x} - \operatorname{bei} x.$$

828.5. $$\operatorname{ber}'_2 x = -\operatorname{ber}' x - \frac{2\operatorname{ber}_2 x}{x}.$$

828.6. $$\operatorname{bei}'_2 x = -\operatorname{bei}' x - \frac{2\operatorname{bei}_2 x}{x}.$$

829.1. $$\operatorname{ber}_{n+1} x = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x - \operatorname{bei}_n x) - \operatorname{ber}_{n-1} x.$$

829.2. $$\operatorname{bei}_{n+1} x = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x + \operatorname{bei}_n x) - \operatorname{bei}_{n-1} x.$$

829.3. $$\operatorname{ber}'_n x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}_{n-1} x + \operatorname{bei}_{n-1} x) - \frac{n\operatorname{ber}_n x}{x}.$$

829.4. $$\operatorname{bei}'_n x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}_{n-1} x - \operatorname{bei}_{n-1} x) - \frac{n\operatorname{bei}_n x}{x}.$$

830. Формулы **828—829** годятся и для бесселевых функций второго рода, если заменить ber на ker и bei на kei.

Таблицы значений функций от аргумента $xi\sqrt{i}$ см. [8], [11], [16].