XII.

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

850.1. $$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1} dx = \Gamma(n).$$

$\Gamma(n)$ — *гамма-функция*. Интеграл имеет конечную величину при $n > 0$.

850.2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

850.3. $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ [n не целое].

850.4. $\Gamma(n) = (n-1)!$, когда n целое положительное.

850.5. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

850.6. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. **850.7.** $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

850.8. $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\ (2n-3)(2n-1)\sqrt{\pi}/2^n$

(n целое положительное).

851.1 $$\ln\Gamma(1+x) = -Cx + \frac{S_2x^2}{2} - \frac{S_3x^3}{3} + \frac{S_4x^4}{4} - \cdots \qquad [x^2 < 1],$$

где C — *эйлерова постоянная*:

$$C = \lim_{p\to\infty}\left[-\ln p + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}\right] = 0{,}5772157$$

и

$$S_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots = \zeta(p).$$ [См. **480.**]

851.2. $$\ln\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x\pi}{\sin x\pi} - Cx - \frac{S_3x^3}{3} - \frac{S_5x^5}{5} - \ldots\ [x^2 < 1].$$

851.3. $$\ln\Gamma(1+x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x\pi}{\sin x\pi}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+ \\ +(1-C)x-(S_3-1)\frac{x^3}{3}-(S_5-1)\frac{x^5}{5}-\ldots$$

Для значений x больше чем $\frac{1}{2}$ использовать **850.2** и **850.3** и эти ряды.

851.4. $$\Gamma(x+1)\approx x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\left[1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}- \right. \\ \left. -\frac{139}{51\,840x^3}-\frac{571}{2\,488\,320x^4}+\ldots\right].$$

Эта формула дает асимптотическое выражение для $x!$, когда x — большое целое число. [См. **11.**]

851.5. $$\ln\Gamma(x+1)\approx\frac{1}{2}\ln(2\pi)-x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x+ \\ +\frac{B_1}{1\cdot 2x}-\frac{B_2}{3\cdot 4x^3}+\frac{B_3}{5\cdot 6x^5}-\ldots$$

[B_1, B_2, ... — числа Бернулли]. [См. **45** и **47.1.**]

Это — асимптотический *ряд Стирлинга*. Абсолютная величина ошибки меньше, чем абсолютная величина первого отброшенного члена.

852.1. $$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx=-C,$$

где $C=0{,}5772157$, как в **851.1.**

853.11. $\Pi(n)=\Gamma(n+1)$. [См. **850.**]

$\Pi(n)$ иногда называют *гауссовой функцией*.

853.12. При n целом положительном $\Pi(n)=n!$.

853.13. $\Pi(0)=1$.

853.21. $$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\mathrm{B}(m,\ n)\ \text{(бета-функция)}$$

$[m,\ n>0]$.

854.11. $$\int_0^1\frac{x^p\,dx}{1+x}=(-1)^p\left\{\ln 2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^p}{p}\right\}$$

$[p=1,\ 2,\ \ldots]$.

854.12. $$\int_0^1\frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}-\frac{1}{p+3q}+\ldots\qquad [p,\ q>0].$$

[См. **35.**]

854.21. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

854.22. $$\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

855.11. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x)^p} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad [0<p<1].$$

855.12. $$\int_0^1 \frac{x^p+x^{-p}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}} \qquad [-1<p<1].$$

855.13. $$\int_0^1 \frac{x^p+x^{-p}}{x^q+x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2q\cos\left(\frac{p}{q}\,\frac{\pi}{2}\right)} \qquad [-q<p<q].$$

855.14. $$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^q)^{1/q}} = \frac{\pi}{q\sin\frac{\pi}{q}} \qquad [q>1].$$

855.15. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^q)^{p/q}} = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}} \qquad [0<p<q].$$

855.21. $$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad [m,\ n>0].$$

855.31. $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (m-1)}{3\cdot5\cdot7\ \ldots\ m} \qquad [m\text{ — нечетное целое} > 1],$$

$$= \frac{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (m-1)}{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ m}\,\frac{\pi}{2} \qquad [m\text{ — четное положительное целое}],$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \qquad [m\text{ — произвольное} > -1].$$

[Положить $\sin x = y$ в **858.44** или **858.45.**]

855.32. $$\int_0^1 x^m \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{m+2}\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

[m — произвольное >-1]. [См. **855.31.**]

855.33. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \qquad [n>0].$$

855.34. $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \qquad [m+1,\ n>0].$$

855.41. $$\int_0^1 x^m (1-x^2)^p\,dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(p+\frac{m+3}{2}\right)} \qquad [p+1,\ m+1>0].$$

855.42. $$\int_0^1 x^m (1-x^n)^p\,dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma\left(p+1+\frac{m+1}{n}\right)}$$

[$p+1,\ m+1,\ n>0$].

855.51. $$\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = a^{m+n-1}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad [m,\ n>0].$$

856.01. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^q} = \frac{\pi}{\sin q\pi} \qquad [0<q<1].$$

Положить $q=1-p$. Тогда

856.02. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(\pi-p\pi)} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad [0<p<1].$$

856.03. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$$

856.04. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{a+x} = \frac{\pi a^{p-1}}{\sin p\pi} \qquad [0<p<1].$$

856.05. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^p} = \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}}$ $[p>1]$.

856.06. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{p\pi}{a^{p+1} \sin p\pi}$ $[0<p<1]$.

856.07. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\cos \frac{p\pi}{2}}$ $[-1<p<1]$.

856.08. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$ $[0<p<q]$.

856.11. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ $[m,\ n>0]$.

856.12. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(a+bx)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{a^n b^m \Gamma(m+n)}$ $[a,\ b,\ m,\ n>0]$.

856.21. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2n-2)} \frac{\pi}{2a^{2n-1}}$ $[a>0;\ n=2,\ 3,\ \ldots]$.

856.31. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$ $[a,\ b>0]$.

856.32. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)(a^n+x^n)} = \frac{\pi}{4a^{n+1}}$ $[a>0]$.

856.33. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = 0.$

857.01. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arcctg} \frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}$

$[a,\ ac-b^2>0$; см. **500.**$]$

857.02. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{b\sqrt{c}+c\sqrt{a}}$ $[a,\ c,\ b\sqrt{c}+c\sqrt{a}>0]$.

857.03. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{a\sqrt{c}+b\sqrt{a}} \qquad [a,\ c,\ a\sqrt{c}+b\sqrt{a}>0].$$

857.11. $$\int_0^\infty \frac{dx}{ax^4+2bx^2+c} = \frac{\pi}{2\sqrt{ch}},$$

где $h=2(b+\sqrt{ac})$ $[a,\ c,\ h>0]$

858.1. $$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

858.2. $$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

858.3. $$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Среднее значение $\sin^2 x$ или $\cos^2 x$ на любом интервале, концы которого кратны $\frac{\pi}{2}$, равно $\frac{1}{2}$.

858.41. $$\int_0^{\pi/2} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{4} \qquad [m=1,\ 2,\ \ldots].$$

858.42. $$\int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad [m=1,\ 2,\ \ldots].$$

858.43. $$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi \qquad [m=1,\ 2,\ \ldots].$$

858.44. $$\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^p x\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (p-1)}{3\cdot 5\cdot 7\ \ldots\ p} \qquad [p \text{ — нечетное целое число } >1],$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ p}\,\frac{\pi}{2} \qquad [p \text{ — четное целое положительное число}],$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \qquad [p \text{ — произвольное } >-1].$$

Полагая $m=0$ в **858.502**, получим тот же результат, что и в **858.44**, несколько в другой форме.

858.45. $$\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^p x\,dx = \frac{\pi\Gamma(p+1)}{2^{p+1}\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\right\}^2}$$ $[p > -1]$.

858.46. $$\int_0^{\pi} \sin^p x\,dx = \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx.$$ $[p > -1]$,

[См. **858.44.** Можно использовать также и **858.45.**]

858.47. $$\int_0^{\pi} x\sin^p x\,dx = \frac{\pi^{3/2}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} = \pi\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx.$$ $[p > -1]$,

[См. **858.44.** Можно использовать также и **858.45.**]

858.48. $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^p x\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}}$$ $[p^2 < 1]$.

858.491. $$\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x} = 2G = 2\cdot 0{,}915\,9656.$$ [См. **48.32.**]

858.492. $$\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

858.493. $$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2\,dx}{\sin^2 x} = \pi\ln 2.$$

858.501. $$\int_0^{\pi/2} \cos^m x\cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^{m+1}}$$ $[m+1 > 0]$.

858.502. $$\int_0^{\pi/2} \cos^p x \cos mx\, dx = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}$$
$[p+1,\ p+m+2,\ p-m+2>0]$.

858.503. $$\int_0^{\pi} \sin^m x \sin mx\, dx = \frac{\pi}{2^m} \sin\frac{m\pi}{2} \qquad [m+1>0].$$

858.504. $$\int_0^{\pi} \sin^p x \sin mx\, dx = \frac{\pi}{2^p} \frac{\sin\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}$$
$[p+1,\ p+m+2,\ p-m+2>0]$.

858.505. $$\int_0^{\pi} \sin^m x \cos mx\, dx = \frac{\pi}{2^m} \cos\frac{m\pi}{2} \qquad [m+1>0].$$

858.506. $$\int_0^{\pi} \sin^p x \cos mx\, dx = \frac{\pi}{2^p} \frac{\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}$$
$[p+1,\ p+m+2,\ p-m+2>0]$.

858.511. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b+1} x\, dx = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!\,2}.$$

858.512. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b} x\, dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2a)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2b-1)}{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2a+2b+1)}.$$

858.513. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a} x \cos^{2b+1} x\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2a-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2b)}{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2a+2b+1)}.$$

858.514. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a} x \cos^{2b} x\, dx = \frac{\pi}{2}\, \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2a-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2b-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2a+2b)}.$$

В **858.511—.514** a и b — целые положительные числа.

858.515. $$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}$$
[p и q произвольные числа >-1].

858.516. $\int\limits_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \qquad [m \neq n],$

$= \frac{\pi}{2} \qquad [m = n]$

[m и n — целые числа].

858.517. $\int\limits_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \qquad [m \neq n],$

$= \frac{\pi}{2} \qquad [m = n]$

[m и n — целые числа].

858.518. $\int\limits_0^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \qquad [m = n],$

$= 0 \qquad [m \neq n;\ (m+n)$ четно$],$

$= \frac{2m}{m^2 - n^2} \qquad [m \neq n;\ (m+n)$ нечетно$]$

[m и n — целые числа].

858.520. $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \sin x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \cos x} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{\arccos a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

В формулах **858.520—858.535** $0 < a < 1$ и, следовательно, углы $\arcsin a$ и $\arccos a$ лежат в первом квадранте.

858.521. $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - a \sin x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - a \cos x} = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.522. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a \sin x} = \frac{\pi - 2 \arcsin a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2 \arccos a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.523. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 - a \sin x} = \frac{\pi + 2 \arcsin a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.524. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 \pm a \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

858.525. $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 \pm a \sin x} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 \pm a \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

858.530. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+a \sin x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+a\cos x)^2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}} - \frac{a}{1-a^2}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.531. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a \sin x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a\cos x)^2} = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}} + \frac{a}{1-a^2}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.532. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1+a \sin x)^2} = \frac{\pi - 2\arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}} - \frac{2a}{1-a^2}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.533. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-a \sin x)^2} = \frac{\pi + 2\arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}} + \frac{2a}{1-a^2}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.534. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 \pm a \cos x)^2} = \frac{\pi}{(1-a^2)^{3/2}}.$$

858.535. $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 \pm a \sin x)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 \pm a \cos x)^2} = \frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}.$$

858.536. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos mx\, dx}{1 + a\cos x} = \frac{\pi\left(\sqrt{1-a^2}-1\right)^m}{a^m \sqrt{1-a^2}} \quad [0 < a < 1;\ m = 0, 1, 2, \ldots].$$

858.537. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a \sin x + b\cos x)^2} = \frac{1}{ab} \qquad [a,\ b > 0].$$

858.540. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}.$$

858.541. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - a^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - a^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}} \qquad [a^2 < 1].$$