XIII.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

890.1. Разделение переменных. Если уравнение может быть представлено в виде $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$, то и левая и правая его части могут быть проинтегрированы.

890.2. Разделение переменных при помощи подстановки. Однородные уравнения. Если уравнение имеет вид

$$f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy = 0,$$

где функции однородны по x и y и притом одинаковой степени, то надо положить $y = ux$. Тогда

$$\frac{dx}{x} = -\frac{f_2(1, u)\,du}{f_1(1, u) + uf_2(1, u)}.$$

Если удобнее, то можно положить $x = uy$.

890.3. Разделение переменных при помощи подстановки в уравнениях вида

$$f_1(xy)\,y\,dx + f_2(xy)\,x\,dy = 0,$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Пусть $u = xy$. Тогда

$$\frac{dx}{x} = \frac{f_2(u)\,du}{u\,\{f_2(u) - f_1(u)\}}.$$

890.4. Уравнение вида

$$(ax + by + c)\,dx + (fx + gy + h)\,dy = 0$$

может быть сделано однородным, если положить $x = x' + m$ и $y = y' + n$. Величины m и n могут быть найдены из системы двух совместных уравнений, которые получаются из требования однородности. Этот метод непригоден, если

$$\frac{ax + by}{fx + gy} = \text{const},$$

но в таком случае можно сделать подстановку $ax + by = u$ и исключить x или y.

890.5. Уравнение в полных дифференциалах. Если для уравнения $M\,dx+N\,dy=0$ удовлетворено условие

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

то это — *уравнение в полных дифференциалах*. Оно интегрируется так: находят интеграл $\int M\,dx$, считая y постоянным, и, добавляя неизвестную функцию $f(y)$, дифференцируют результат по y. Полученное выражение приравнивают N; из полученного уравнения определяют неизвестную функцию $f(y)$. Таким образом, решение будет иметь вид:

$$\int M\,dx+f(y)+C=0.$$

Если удобнее, то можно поменять ролями M и N и соответственно x и y.

891.1. Линейные уравнения первого порядка. Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно содержит только первую степень функции и ее производных. Линейное уравнение первого порядка имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \quad \text{или} \quad dy+Py\,dx=Q\,dx,$$

где P и Q не зависят от y, но могут содержать x. Решение такого уравнения:

$$y=e^{-\int P\,dx}\left[\int e^{\int P\,dx}\,Q\,dx+C\right].$$

891.2 Уравнение Бернулли. Если уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n,$$

где P и Q не содержат y, то его можно сделать линейным при помощи подстановки $u=y^{1-n}$. Прежде чем делать эту подстановку, надо разделить уравнение на y^n.

892. Нелинейные уравнения первого порядка. Полагаем

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

Если удается разрешить заданное уравнение относительно p и проинтегрировать каждое из полученных уравнений в отдельности, то тем самым будет получено решение исходного уравнения.

893.1. Уравнения второго порядка, явно не содержащие y. Полагаем

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

Уравнение превратится в уравнение первого порядка, содержащее p и x. Его можно решить каким-либо из рассмотренных выше методов.

893.2. Уравнения второго порядка, явно не содержащие x. Полагаем

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

Получается уравнение первого порядка, содержащее p и y, и его можно решить каким-либо из рассмотренных выше методов.

894. Чтобы решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=0,$$

где A и B постоянные, надо найти корни вспомогательного уравнения $p^2+Ap+B=0$. Если его корни a и b действительны и не равны между собой, то решение заданного уравнения будет $y=he^{ax}+ke^{bx}$, где h и k — произвольные постоянные. Если его корни — комплексные величины: $m+in$ и $m-in$, то

$$y=e^{mx}(h\cos nx+k\sin nx).$$

Если оно имеет два равных корня a, a, то

$$y=e^{ax}(hx+k).$$

895. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^ny}{dx^n}+A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+Ky=0.$$

Решением его будет сумма членов вида he^{ax}, где каждое a есть один из различных действительных корней вспомогательного уравнения

$$p^n+Ap^{n-1}+Bp^{n-2}+\ldots+K=0.$$

Если a — двукратный корень вспомогательного уравнения, то соответствующий член будет $e^{ax}(hx+k)$.

Если a — трехкратный корень, то соответствующий член будет $e^{ax}(hx^2+kx+l)$ и т. д.

Когда имеется пара комплексных корней $m+in$ и $m-in$, то в решении появится член

$$e^{mx}(h\cos nx + k\sin nx).$$

Если это — пара двукратных корней, то соответствующий член в решении будет

$$e^{mx}\{(hx+k)\cos nx + (sx+t)\sin nx\}$$

и т. д.

896. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами с правой частью

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + Ky = X,$$

где X содержит x.

Сначала полагаем $X=0$ и решаем полученное уравнение **894** или **895**. Затем нужно прибавить к этому решению частный интеграл, который удовлетворяет заданному уравнению и который не должен содержать постоянных интегрирования, так как такие постоянные уже вошли в решение.

897. Уравнение Эйлера второго порядка

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + Ax\frac{dy}{dx} + By = f(x)$$

преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (A-1)\frac{dy}{dv} + By = f(e^v)$$

при помощи подстановки $x=e^v$.

898. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R.$$

Чтобы его решить, нужно сначала решить уравнения

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

и представить решения в виде $u=C_1$, $v=C_2$. Тогда искомым решением будет

$$\varphi(u, v) = 0,$$

где φ — произвольная функция.