

Интегралы, содержащие $X=a+bx$

$$83. \int (a+bx)^n dx = \frac{1}{b} \int X^n dX = \frac{X^{n+1}}{b(n+1)} \quad [n \neq -1].$$

84. 1. $\int x^m (a+bx)^n dx$ можно интегрировать почленно после разложения $(a+bx)^n$ по формуле бинома Ньютона, если n целое положительное.

84. 2. Когда m целое положительное и если $m < n$ или n дробное, может быть, лучше использовать формулу

$$\int x^m X^n dx = \frac{1}{b^{m+1}} \int (X-a)^m X^n dX$$

и разложить $(X-a)^m$ по формуле бинома Ньютона.

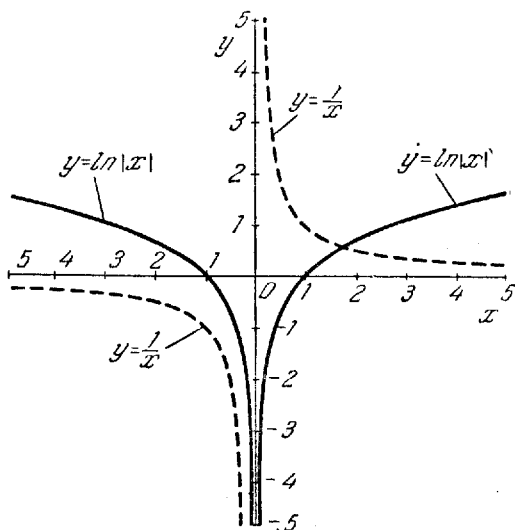


Рис. 82.1. Графики функций $y=1/x$ (пунктирная линия) и $y=\ln|x|$ (сплошная линия).

85. Интегрирование рациональных дробей—см. соответствующий раздел в учебниках интегрального исчисления.

89. Общая формула для 90—95:

$$\int \frac{x^m dx}{X^n} = \frac{1}{b^{m+1}} \int \frac{(X-a)^m dX}{X^n} = \frac{1}{b^{m+1}} \left[\sum_{s=0}^m \frac{m!(-a)^s X^{m-n-s+1}}{(m-s)!s!(m-n-s+1)!} \right],$$

за исключением $m-n-s+1=0$. В этом случае соответствующую

щий член суммы в квадратных скобках должен быть заменен на

$$\frac{m! (-a)^{m-n+1}}{(m-n+1)! (n-1)!} \ln |X|.$$

Все буквы означают действительные величины. При наличии $\ln |X|$ нельзя интегрировать на интервале, содержащем точку $X=0$. Если X — отрицательная величина, то надо брать $\ln |X|$, так как $\ln(-1) \equiv (2k+1)\pi i$ войдет в постоянную интегрирования.

$$90. \quad \int \frac{dx}{X^n} = \frac{-1}{(n-1) b X^{n-1}} \quad [n \neq 1].$$

$$90.1. \quad \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{b} \ln |X|. \quad [\text{См. примечание к 89}].$$

$$90.2. \quad \int \frac{dx}{X^2} = -\frac{1}{bX}. \quad 90.3. \quad \int \frac{dx}{X^3} = -\frac{1}{2bX^2}.$$

$$90.4. \quad \int \frac{dx}{X^4} = -\frac{1}{3bX^3}. \quad 90.5. \quad \int \frac{dx}{X^5} = -\frac{1}{4bX^4}.$$

$$91. \quad \int \frac{x dx}{X^n} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{-1}{(n-2) X^{n-2}} + \frac{a}{(n-1) X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

$$91.1. \quad \int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{b^2} [X - a \ln |X|].$$

$$91.2. \quad \int \frac{x dx}{X^2} = \frac{1}{b^2} \left[\ln |X| + \frac{a}{X} \right].$$

$$91.3. \quad \int \frac{x dx}{X^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{X} + \frac{a}{2X^2} \right].$$

$$91.4. \quad \int \frac{x dx}{X^4} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{a}{3X^3} \right].$$

$$91.5. \quad \int \frac{x dx}{X^5} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{a}{4X^4} \right].$$

$$92. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{-1}{(n-3) X^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2) X^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1) X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

$$92.1. \quad \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{X^2}{2} - 2aX + a^2 \ln |X| \right].$$

Другое выражение, отличающееся на постоянную:

$$\frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} \ln |a + bx|.$$

$$92.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{b^2} \left[X - 2a \ln |X| - \frac{a^2}{X} \right].$$

$$92.3. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{b^2} \left[\ln |X| + \frac{2a}{X} - \frac{a^2}{2X^2} \right].$$

$$92.4. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^4} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{X} + \frac{2a}{2X^2} - \frac{a^2}{3X^3} \right].$$

$$92.5. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^5} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{2a}{3X^3} - \frac{a^2}{4X^4} \right].$$

$$92.6. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^6} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{2a}{4X^4} - \frac{a^2}{5X^5} \right].$$

$$92.7. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^7} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{4X^4} + \frac{2a}{5X^5} - \frac{a^2}{6X^6} \right].$$

$$93. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^n} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{3a}{(n-3)X^{n-3}} - \frac{3a^2}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{a^3}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

$$93.1. \quad \int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{1}{b^4} \left[\frac{X^3}{3} - \frac{3aX^2}{2} + 3a^2X - a^3 \ln |X| \right] = \\ = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^4} \ln |a + bx| + \text{const.}$$

$$93.2. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{1}{b^4} \left[\frac{X^2}{2} - 3aX + 3a^2 \ln |X| + \frac{a^3}{X} \right].$$

$$93.3. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^3} = \frac{1}{b^4} \left[X - 3a \ln |X| - \frac{3a^2}{X} + \frac{a^3}{2X^2} \right].$$

$$93.4. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^4} = \frac{1}{b^4} \left[\ln |X| + \frac{3a}{X} - \frac{3a^2}{2X^2} + \frac{a^3}{3X^3} \right].$$

$$93.5. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^5} = \frac{1}{b^4} \left[-\frac{1}{X} + \frac{3a}{2X^2} - \frac{3a^2}{3X^3} + \frac{a^3}{4X^4} \right].$$

$$93.6. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^6} = \frac{1}{b^4} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{3X^3} - \frac{3a^2}{4X^4} + \frac{a^3}{5X^5} \right].$$

$$93.7. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^7} = \frac{1}{b^4} \left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{3a}{4X^4} - \frac{3a^2}{5X^5} + \frac{a^3}{6X^6} \right].$$

$$94. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^n} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{-1}{(n-5)X^{n-5}} + \frac{4a}{(n-4)X^{n-4}} - \frac{6a^2}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{4a^3}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{a^4}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени при X равен нулю, см. 89).

$$94.1. \quad \int \frac{x^4 dx}{X} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{X^4}{4} - \frac{4aX^3}{3} + \frac{6a^2X^2}{2} - 4a^3X + a^4 \ln |X| \right] = \\ = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^5} \ln |a + bx| + \text{const.}$$

$$94.2. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^2} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{X^3}{3} - \frac{4aX^2}{2} + 6a^2X - 4a^3 \ln |X| - \frac{a^4}{X} \right].$$

$$94.3. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^3} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{X^2}{2} - 4aX + 6a^2 \ln |X| + \frac{4a^3}{X} - \frac{a^4}{2X^2} \right].$$

$$94.4. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^4} = \frac{1}{b^5} \left[X - 4a \ln |X| - \frac{6a^2}{X} + \frac{4a^3}{2X^2} - \frac{a^4}{3X^3} \right].$$

$$94.5. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^5} = \frac{1}{b^5} \left[\ln |X| + \frac{4a}{X} - \frac{6a^2}{2X^2} + \frac{4a^3}{3X^3} - \frac{a^4}{4X^4} \right].$$

$$94.6. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^6} = \frac{1}{b^5} \left[-\frac{1}{X} + \frac{4a}{2X^2} - \frac{6a^2}{3X^3} + \frac{4a^3}{4X^4} - \frac{a^4}{5X^5} \right].$$

$$94.7. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^7} = \frac{1}{b^5} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{4a}{3X^3} - \frac{6a^2}{4X^4} + \frac{4a^3}{5X^5} - \frac{a^4}{6X^6} \right].$$

$$95. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^n} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{-1}{(n-6)X^{n-6}} + \frac{5a}{(n-5)X^{n-5}} - \right. \\ \left. - \frac{10a^2}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{10a^3}{(n-3)X^{n-3}} - \right. \\ \left. - \frac{5a^4}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{a^5}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени при X равен нулю, см. 89).

$$95.1. \quad \int \frac{x^5 dx}{X} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{X^5}{5} - \frac{5aX^4}{4} + \frac{10a^2X^3}{3} - \frac{10a^3X^2}{2} + 5a^4X - a^5 \ln |X| \right] = \\ = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^4}{4b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x^2}{2b^4} + \frac{a^4x}{b^5} - \frac{a^5}{b^6} \ln |a + bx| + \text{const.}$$

$$95.2. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^2} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{X^4}{4} - \frac{5aX^3}{3} + \frac{10a^2X^2}{2} - 10a^3X + 5a^4 \ln |X| + \frac{a^5}{X} \right].$$

$$95.3. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^3} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{X^3}{3} - \frac{5aX^2}{2} + 10a^2X - 10a^3 \ln |X| - \frac{5a^4}{X} + \frac{a^5}{2X^2} \right].$$

$$95.4. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^4} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{X^2}{2} - 5aX + 10a^2 \ln |X| + \frac{10a^3}{X} - \frac{5a^4}{2X^2} + \frac{a^5}{3X^3} \right].$$

$$95.5. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^5} = \frac{1}{b^6} \left[X - 5a \ln |X| - \frac{10a^2}{X} + \frac{10a^3}{2X^2} - \frac{5a^4}{3X^3} + \frac{a^5}{4X^4} \right].$$

$$95.6. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^6} = \frac{1}{b^6} \left[\ln |X| + \frac{5a}{X} - \frac{10a^2}{2X^2} + \frac{10a^3}{3X^3} - \frac{5a^4}{4X^4} + \frac{a^5}{5X^5} \right].$$

$$95.7. \int \frac{x^5 dx}{X^7} = \frac{1}{b^6} \left[-\frac{1}{X} + \frac{5a}{2X^2} - \frac{10a^2}{3X^3} + \frac{10a^3}{4X^4} - \frac{5a^4}{5X^5} + \frac{a^5}{6X^6} \right].$$

$$95.8. \int \frac{x^5 dx}{X^8} = \frac{1}{b^6} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{5a}{3X^3} - \frac{10a^2}{4X^4} + \frac{10a^3}{5X^5} - \frac{5a^4}{6X^6} + \frac{a^5}{7X^7} \right].$$

100. Общая формула для 101—105

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^m X^n} &= \frac{-1}{a^{m+n-1}} \int \frac{\left(\frac{X}{x} - b\right)^{m+n-2}}{\left(\frac{X}{x}\right)^n} d\left(\frac{X}{x}\right) = \\ &= \frac{-1}{a^{m+n-1}} \left[\sum_{s=0}^{m+n-2} \frac{(m+n-2)! X^{m-s-1} (-b)^s}{(m+n-s-2)! s! (m-s-1)! x^{m-s-1}} \right], \end{aligned}$$

кроме $m-s-1=0$, когда соответствующий член в квадратных скобках заменяется на

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} (-b)^{m-1} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.1. \int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.2. \int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{a^2} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{bx}{X} \right].$$

$$101.3. \int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{a^3} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{2bx}{X} - \frac{b^2 x^2}{2X^2} \right].$$

$$101.4. \int \frac{dx}{xX^4} = -\frac{1}{a^4} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{3bx}{X} - \frac{3b^2 x^2}{2X^2} + \frac{b^3 x^3}{3X^3} \right].$$

$$101.5. \int \frac{dx}{xX^5} = -\frac{1}{a^5} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{4bx}{X} - \frac{6b^2 x^2}{2X^2} + \frac{4b^3 x^3}{3X^3} - \frac{b^4 x^4}{4X^4} \right].$$

Другие выражения, отличающиеся на постоянную:

$$101.92. \int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{aX} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.93. \int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{2aX^2} + \frac{1}{a^2 X} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.94. \int \frac{dx}{xX^4} = \frac{1}{3aX^3} + \frac{1}{2a^2 X^2} + \frac{1}{a^3 X} - \frac{1}{a^4} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.95. \int \frac{dx}{xX^5} = \frac{1}{4aX^4} + \frac{1}{3a^2 X^3} + \frac{1}{2a^3 X^2} + \frac{1}{a^4 X} - \frac{1}{a^5} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$102.1. \int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{a^2} \left[\frac{X}{x} - b \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right].$$

$$102.2. \int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^3} \left[\frac{X}{x} - 2b \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{b^2 x}{X} \right].$$

На этой странице $X=a+bx$.

$$102.3. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^3} = -\frac{1}{a^4} \left[\frac{X}{x} - 3b \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{3b^2 x}{X} + \frac{b^3 x^2}{2X^2} \right].$$

$$102.4. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^4} = -\frac{1}{a^5} \left[\frac{X}{x} - 4b \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{6b^2 x}{X} + \frac{4b^3 x^2}{2X^2} - \frac{b^4 x^3}{3X^3} \right].$$

Другие выражения, отличающиеся на постоянную:

$$102.91. \quad \int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$102.92. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^2} = -b \left[\frac{1}{a^2 X} + \frac{1}{a^2 bx} - \frac{2}{a^3} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right].$$

$$102.93. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^3} = -b \left[\frac{1}{2a^2 X^2} + \frac{2}{a^3 X} + \frac{1}{a^3 bx} - \frac{3}{a^4} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right].$$

$$102.94. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^4} = -b \left[\frac{1}{3a^2 X^3} + \frac{2}{2a^3 X^2} + \frac{3}{a^4 X} + \frac{1}{a^4 bx} - \frac{4}{a^5} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right].$$

$$103.1. \quad \int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{a^3} \left[\frac{X^2}{2x^2} - \frac{2bX}{x} + b^2 \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right] = \\ = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{b^2}{a^3} \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \text{const.}$$

$$103.2. \quad \int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{a^4} \left[\frac{X^2}{2x^2} - \frac{3bX}{x} + 3b^2 \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{b^3 x}{X} \right].$$

$$103.3. \quad \int \frac{dx}{x^3 X^3} = -\frac{1}{a^5} \left[\frac{X^2}{2x^2} - \frac{4bX}{x} + 6b^2 \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{4b^3 x}{X} - \frac{b^4 x^2}{2X^2} \right].$$

$$104.1. \quad \int \frac{dx}{x^4 X} = -\frac{1}{a^4} \left[\frac{X^3}{3x^3} - \frac{3bX^2}{2x^2} + \frac{3b^2 X}{x} - b^3 \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right] = \\ = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2 x^2} - \frac{b^2}{a^3 x} + \frac{b^3}{a^4} \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \text{const.}$$

$$104.2. \quad \int \frac{dx}{x^4 X^2} = -\frac{1}{a^5} \left[\frac{X^3}{3x^3} - \frac{4bX^2}{2x^2} + \frac{6b^2 X}{x} - 4b^3 \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{b^4 x}{X} \right].$$

$$105.1. \quad \int \frac{dx}{x^5 X} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{3a^2 x^3} - \frac{b^2}{2a^3 x^2} + \frac{b^3}{a^4 x} - \frac{b^4}{a^5} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$