

Интегралы, содержащие $s = (x^2 - a^2)^{1/2}$

$$260.01. \quad \int \frac{dx}{s} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + s|,$$

$[x^2 > a^2]$ (см. рисунок на стр. 54).

Заметим, что $\ln \left| \frac{x+s}{a} \right| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+s}{x-s} \right) = \operatorname{Arch} \left| \frac{x}{a} \right|$.

Для положительных значений x надо брать положительное значение $\operatorname{Arch} \left| \frac{x}{a} \right|$, для отрицательных — отрицательное. s надо всегда считать положительным.

$$260.03. \quad \int \frac{dx}{s^3} = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{s}.$$

$$260.05. \quad \int \frac{dx}{s^5} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x}{s} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} \right].$$

$$260.07. \quad \int \frac{dx}{s^7} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{x}{s} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} \right].$$

$$260.09. \quad \int \frac{dx}{s^9} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{x}{s} - \frac{3}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{3}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} \right].$$

$$260.11. \quad \int \frac{dx}{s^{11}} = -\frac{1}{a^{10}} \left[\frac{x}{s} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{6}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{4}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{s^9} \right].$$

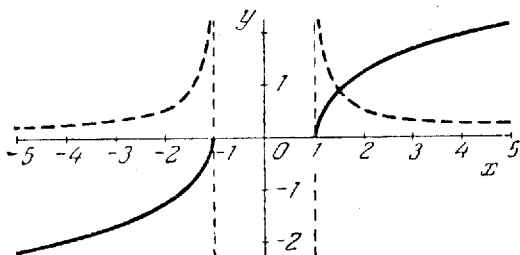


Рис. 260.01. Графики функций $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (пунктирная линия) и $y = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$ (сплошная линия).

$$260.13. \quad \int \frac{dx}{s^{13}} = \frac{1}{a^{12}} \left[\frac{x}{s} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{10}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{10}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{5}{9} \frac{x^9}{s^9} - \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} \right].$$

$$260.15. \quad \int \frac{dx}{s^{15}} = -\frac{1}{a^{14}} \left[\frac{x}{s} - \frac{6}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{15}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{20}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{15}{9} \frac{x^9}{s^9} - \frac{6}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{s^{13}} \right].$$

Интегралы 260.03—260.15 находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{x^2 - a^2}; \quad \text{тогда} \quad dx = \frac{-adz}{(z^2 - 1)^{3/2}}.$$

$$261.01. \quad \int \frac{x dx}{s} = s. \quad 261.03. \quad \int \frac{x dx}{s^3} = -\frac{1}{s}.$$

$$261.05. \quad \int \frac{x dx}{s^5} = -\frac{1}{3s^3}. \quad 261.07. \quad \int \frac{x dx}{s^7} = -\frac{1}{5s^5}.$$

$$261.9. \quad \int \frac{x dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-1)s^{2p-1}}.$$

$$262.01. \quad \int \frac{x^2 dx}{s} = \frac{xs}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|x+s|. \quad (\text{См. замечание в 260.01.})$$

$$262.03. \quad \int \frac{x^2 dx}{s^3} = -\frac{x}{s} + \ln |x + s|.$$

$$262.05. \quad \int \frac{x^2 dx}{s^5} = -\frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{s^3}.$$

$$262.07. \quad \int \frac{x^2 dx}{s^7} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} \right].$$

$$262.09. \quad \int \frac{x^2 dx}{s^9} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} - \frac{2}{5} \frac{x^5}{s^5} + \frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} \right].$$

$$262.11. \quad \int \frac{x^2 dx}{s^{11}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} - \frac{3}{5} \frac{x^5}{s^5} + \frac{3}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{1}{9} \frac{x^9}{s^9} \right].$$

$$262.13. \quad \int \frac{x^2 dx}{s^{13}} = -\frac{1}{a^{10}} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} - \frac{4}{5} \frac{x^5}{s^5} + \frac{6}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{4}{9} \frac{x^9}{s^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} \right].$$

$$262.15. \quad \int \frac{x^2 dx}{s^{15}} = \frac{1}{a^{12}} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} - \frac{5}{5} \frac{x^5}{s^5} + \frac{10}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{10}{9} \frac{x^9}{s^9} + \right. \\ \left. + \frac{5}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} - \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{s^{13}} \right].$$

$$263.01. \quad \int \frac{x^3 dx}{s} = \frac{s^3}{3} + a^2 s.$$

$$263.03. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^3} = s - \frac{a^2}{s}.$$

$$263.05. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^5} = -\frac{1}{s} - \frac{a^2}{3s^3}.$$

$$263.9. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-3)s^{2p-3}} - \frac{a^2}{(2p-1)s^{2p-1}}.$$

$$264.01. \quad \int \frac{x^4 dx}{s} = \frac{x^3 s}{4} + \frac{3}{8} a^2 x s + \frac{3}{8} a^4 \ln |x + s|.$$

(См. замечание в 260.01.)

$$264.03. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^3} = \frac{x s}{2} - \frac{a^2 x}{s} + \frac{3}{2} a^2 \ln |x + s|.$$

$$264.05. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^5} = -\frac{x}{s} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} + \ln |x + s|.$$

$$264.07. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^7} = -\frac{1}{5a^2} \frac{x^5}{s^5}.$$

$$264.09. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^9} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} \right].$$

$$264.11. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^{11}} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{2}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{s^9} \right].$$

$$264.13. \int \frac{x^4 dx}{s^{12}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{3}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{3}{9} \frac{x^9}{s^9} - \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} \right].$$

$$264.15. \int \frac{x^4 dx}{s^{15}} = -\frac{1}{a^{10}} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{4}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{6}{9} \frac{x^9}{s^9} - \frac{4}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{s^{13}} \right].$$

$$265.01. \int \frac{x^5 dx}{s} = \frac{s^5}{5} + \frac{2}{3} a^2 s^3 + a^4 s.$$

$$265.03. \int \frac{x^5 dx}{s^3} = \frac{s^3}{3} + 2a^2 s - \frac{a^4}{s}.$$

$$265.05. \int \frac{x^5 dx}{s^5} = s - \frac{2a^2}{s} - \frac{a^4}{3s^3}.$$

$$265.07. \int \frac{x^5 dx}{s^7} = -\frac{1}{s} - \frac{2a^2}{3s^3} - \frac{a^4}{5s^5}.$$

$$265.9. \int \frac{x^5 dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-5)s^{2p-5}} - \frac{2a^2}{(2p-3)s^{2p-3}} - \frac{a^4}{(2p-1)s^{2p-1}}.$$

$$266.01. \int \frac{x^6 dx}{s} = \frac{x^5 s}{6} + \frac{5}{24} a^2 x^3 s + \frac{5}{16} a^4 x s + \frac{5}{16} a^6 \ln |x+s|.$$

(См. замечание в 260.01.)

$$266.03. \int \frac{x^6 dx}{s^3} = \frac{x^5}{4s} + \frac{5}{8} \frac{a^2 x^3}{s} - \frac{15}{8} \frac{a^4 x}{s} + \frac{15}{8} a^4 \ln |x+s|.$$

$$266.05. \int \frac{x^6 dx}{s^5} = \frac{x^5}{2s^3} - \frac{10}{3} \frac{a^2 x^3}{s^3} + \frac{5}{2} \frac{a^4 x}{s^3} + \frac{5}{2} a^2 \ln |x+s|.$$

$$266.07. \int \frac{x^6 dx}{s^7} = -\frac{23}{15} \frac{x^5}{s^5} + \frac{7}{3} \frac{a^2 x^3}{s^5} - \frac{a^4 x}{s^5} + \ln |x+s|.$$

$$266.09. \int \frac{x^6 dx}{s^9} = -\frac{1}{7a^2} \frac{x^7}{s^7}.$$

$$266.11. \int \frac{x^6 dx}{s^{11}} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{1}{9} \frac{x^9}{s^9} \right].$$

$$266.13. \int \frac{x^6 dx}{s^{13}} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{2}{9} \frac{x^9}{s^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} \right].$$

$$266.15. \int \frac{x^6 dx}{s^{15}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{3}{9} \frac{x^9}{s^9} + \frac{3}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} - \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{s^{13}} \right].$$

$$267.01. \int \frac{x^7 dx}{s} = \frac{1}{7} s^7 + \frac{3}{5} a^2 s^5 + \frac{3}{3} a^4 s^3 + a^6 s.$$

$$267.03. \int \frac{x^7 dx}{s^3} = \frac{1}{5} s^5 + \frac{3}{3} a^2 s^3 + 3a^4 s - \frac{a^6}{s}.$$

$$267.05. \int \frac{x^7 dx}{s^5} = \frac{1}{3} s^3 + 3a^2 s - \frac{3a^4}{s} - \frac{a^6}{3s^3}.$$

$$267.07. \quad \int \frac{x^7 dx}{s^7} = s - \frac{3a^2}{s} - \frac{3a^4}{3s^3} - \frac{a^6}{5s^5}.$$

$$267.9. \quad \int \frac{x^7 dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-7)s^{2p-7}} - \frac{3a^2}{(2p-5)s^{2p-5}} - \frac{3a^4}{(2p-3)s^{2p-3}} - \frac{a^6}{(2p-1)s^{2p-1}}.$$

$$281.01. \quad \int \frac{dx}{xs} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \left| \frac{a}{x} \right| = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| \quad [x^2 > a^2].$$

$$281.03. \quad \int \frac{dx}{xs^3} = -\frac{1}{a^2 s} - \frac{1}{a^3} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

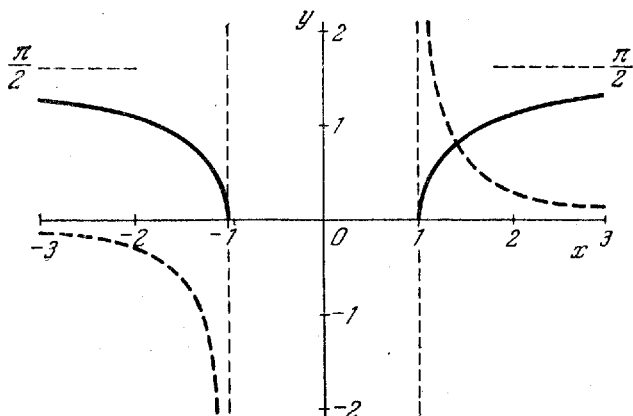


Рис. 281.01. Графики функций $y = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (пунктирная линия) и $y = \arccos \left| \frac{1}{x} \right|$ (сплошная линия).

$$281.05. \quad \int \frac{dx}{xs^5} = -\frac{1}{3a^2 s^3} + \frac{1}{a^2 s} + \frac{1}{a^3} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$281.07. \quad \int \frac{dx}{xs^7} = -\frac{1}{5a^2 s^5} + \frac{1}{3a^4 s^3} - \frac{1}{a^6 s} - \frac{1}{a^7} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$281.09. \quad \int \frac{dx}{xs^9} = -\frac{1}{7a^2 s^7} + \frac{1}{5a^4 s^5} - \frac{1}{3a^6 s^3} + \frac{1}{a^8 s} + \frac{1}{a^9} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$282.01. \quad \int \frac{dx}{x^2 s} = \frac{s}{a^2 x}.$$

$$282.03. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^3} = -\frac{1}{a^4} \left(\frac{s}{x} + \frac{x}{s} \right).$$

$$282.05. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^5} = \frac{1}{a^6} \left(\frac{s}{x} + \frac{2x}{s} - \frac{x^3}{3s^3} \right).$$

$$282.07. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^7} = -\frac{1}{a^8} \left(\frac{s}{x} + \frac{3x}{s} - \frac{3x^3}{3s^3} + \frac{x^5}{5s^5} \right).$$

$$282.09. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^9} = \frac{1}{a^{10}} \left(\frac{s}{x} + \frac{4x}{s} - \frac{6x^3}{3s^3} + \frac{4x^5}{5s^5} - \frac{x^7}{7s^7} \right).$$

$$283.01. \quad \int \frac{dx}{x^3 s} = \frac{s}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

(См. замечание к 281.01.)

$$283.03. \quad \int \frac{dx}{x^3 s^3} = \frac{1}{2a^2 x^2 s} - \frac{3}{2a^4 s} - \frac{3}{2a^5} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$283.05. \quad \int \frac{dx}{x^3 s^5} = \frac{1}{2a^2 x^2 s^3} - \frac{5}{6a^4 s^3} + \frac{5}{2a^6 s} + \frac{5}{2a^7} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$284.01. \quad \int \frac{dx}{x^4 s} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{s}{x} - \frac{s^3}{3x^3} \right).$$

$$284.03. \quad \int \frac{dx}{x^4 s^3} = -\frac{1}{a^6} \left(\frac{x}{s} + \frac{2s}{x} - \frac{s^3}{3x^3} \right).$$

$$284.05. \quad \int \frac{dx}{x^4 s^5} = \frac{1}{a^8} \left(-\frac{x^3}{3s^3} + \frac{3x}{s} + \frac{3s}{x} - \frac{s^3}{3x^3} \right).$$

Интегралы 282 и 284 находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{s^2}; \quad \text{тогда} \quad dx = \frac{-a dz}{(z^2 - 1)^{3/2}}.$$

$$290.01. \quad \int s dx = \frac{xs}{2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + s|. \quad (\text{См. замечание к 260.01.})$$

$$290.03. \quad \int s^3 dx = \frac{1}{4} xs^3 - \frac{3}{8} a^2 xs + \frac{3}{8} a^4 \ln |x + s|.$$

$$290.05. \quad \int s^5 dx = \frac{1}{6} xs^5 - \frac{5}{24} a^2 xs^3 + \frac{5}{16} a^4 xs - \frac{5}{16} a^6 \ln |x + s|.$$

$$291.01. \quad \int xs dx = \frac{s^3}{3}. \quad 291.03. \quad \int xs^3 dx = \frac{s^5}{5}.$$

$$291.9. \quad \int xs^{2p+1} dx = \frac{s^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$292.01. \quad \int x^2 s dx = \frac{xs^3}{4} + \frac{a^2 xs}{8} - \frac{a^4}{8} \ln |x + s|.$$

(См. замечание к 260.01.)

$$292.03. \quad \int x^2 s^3 dx = \frac{xs^5}{6} + \frac{a^2 xs^3}{24} - \frac{a^4 xs}{16} + \frac{a^6}{16} \ln |x + s|.$$

$$293.01. \int x^3 s dx = \frac{s^5}{5} + \frac{a^2 s^3}{3}. \quad 293.03. \int x^3 s^3 dx = \frac{s^7}{7} + \frac{a^2 s^5}{5}.$$

$$293.9. \int x^3 s^{2p+1} dx = \frac{s^{2p+5}}{2p+5} + \frac{a^2 s^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$294.01. \int x^4 s dx = \frac{x^3 s^3}{6} + \frac{a^2 x s^3}{8} + \frac{a^4 x s}{16} - \frac{a^6}{16} \ln |x + s|.$$

(См. замечание к 260.01.)

$$294.03. \int x^4 s^3 dx = \frac{x^3 s^5}{8} + \frac{a^2 x s^5}{16} + \frac{a^4 x s^3}{64} - \frac{3}{128} a^6 x s + \frac{3}{128} a^8 \ln |x + s|.$$

$$295.01. \int x^5 s dx = \frac{s^7}{7} + \frac{2a^2 s^5}{5} + \frac{a^4 s^3}{3}.$$

$$295.03. \int x^5 s^3 dx = \frac{s^9}{9} + \frac{2a^2 s^7}{7} + \frac{a^4 s^5}{5}.$$

$$295.9. \int x^5 s^{2p+1} dx = \frac{s^{2p+7}}{2p+7} + \frac{2a^2 s^{2p+5}}{2p+5} + \frac{a^4 s^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$301.01. \int \frac{s dx}{x} = s - a \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$301.03. \int \frac{s^3 dx}{x} = \frac{s^3}{3} - a^2 s + a^3 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$301.05. \int \frac{s^5 dx}{x} = \frac{s^5}{5} - \frac{a^2 s^3}{3} + a^4 s - a^5 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$301.07. \int \frac{s^7 dx}{x} = \frac{s^7}{7} - \frac{a^2 s^5}{5} + \frac{a^4 s^3}{3} - a^6 s + a^7 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$302.01. \int \frac{s dx}{x^2} = -\frac{s}{x} + \ln |x + s|. \quad (\text{См. замечание к 260.01.})$$

$$302.03. \int \frac{s^3 dx}{x^2} = -\frac{s^3}{x} + \frac{3}{2} x s - \frac{3}{2} a^2 \ln |x + s|.$$

$$302.05. \int \frac{s^5 dx}{x^2} = -\frac{s^5}{x} + \frac{5}{4} x s^3 - \frac{15}{8} a^2 x s + \frac{15}{8} a^4 \ln |x + s|.$$

$$303.01. \int \frac{s dx}{x^3} = -\frac{s}{2x^2} + \frac{1}{2a} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$303.03. \int \frac{s^3 dx}{x^3} = -\frac{s^3}{2x^2} + \frac{3s}{2} - \frac{3}{2} a \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$303.05. \int \frac{s^5 dx}{x^3} = -\frac{s^5}{2x^2} + \frac{5}{6} s^3 - \frac{5}{2} a^2 s + \frac{5}{2} a^3 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$304.01. \int \frac{s dx}{x^4} = \frac{s^3}{3a^2 x^3}.$$

$$304.03. \quad \int \frac{s^3 dx}{x^4} = -\frac{s^3}{3x^3} - \frac{s}{x} + \ln|x+s|. \quad (\text{См. замечание к } 260.01.)$$

$$304.05. \quad \int \frac{s^5 dx}{x^4} = \frac{a^2 s^3}{3x^3} + \frac{2a^2 s}{x} + \frac{xs}{2} - \frac{5}{2} a^2 \ln|x+s|.$$

$$305.01. \quad \int \frac{s dx}{x^5} = -\frac{s}{4x^4} + \frac{s}{8a^2 x^2} + \frac{1}{8a^3} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$305.03. \quad \int \frac{s^3 dx}{x^5} = -\frac{s^3}{4x^4} + \frac{3}{8} \frac{s^3}{a^2 x^2} - \frac{3}{8} \frac{s}{a^2} + \frac{3}{8a} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$306.01. \quad \int \frac{s dx}{x^6} = \frac{s^3}{5a^2 x^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3a^2} \right).$$

$$306.03. \quad \int \frac{s^3 dx}{x^6} = \frac{s^5}{5a^2 x^3}.$$

$$307.01. \quad \int \frac{s dx}{x^7} = -\frac{s}{6x^6} + \frac{s}{24a^2 x^4} + \frac{s}{16a^4 x^2} + \frac{1}{16a^5} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$308.01. \quad \int \frac{s dx}{x^8} = \frac{s^3}{7a^2 x^3} \left(\frac{1}{x^4} + \frac{4}{5a^2 x^2} + \frac{8}{15a^4} \right).$$