II.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

400.01. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$

400.02. $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$

400.03. $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}.$

400.04. $\operatorname{tg} A = \sin A / \cos A.$

400.05. $\operatorname{ctg} A = \cos A / \sin A = 1/\operatorname{tg} A.$

400.06. $\sec A = 1/\cos A.$

400.07. $\csc A = 1/\sin A.$

400.08. $\sin(-A) = -\sin A.$

400.09. $\cos(-A) = \cos A.$

400.10. $\operatorname{tg}(-A) = -\operatorname{tg} A.$

400.11. $\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A = 1.$

400.12. $\sec A = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}.$

400.13. $\operatorname{tg} A = \sqrt{\sec^2 A - 1}.$

400.14. $\csc^2 A - \operatorname{ctg}^2 A = 1.$

400.15. $\csc A = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 A}.$

400.16. $\operatorname{ctg} A = \sqrt{\csc^2 A - 1}.$

Заметим, что для действительных значений A знак вышеуказанных радикалов зависит от того, в какой четверти находится угол A.

401.01. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$

401.02. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$

401.03. $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$

401.04. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$

401.05. $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B).$

401.06. $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B).$

401.07. $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B).$

401.08. $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$

401.09. $\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$

401.10. $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$

401.11. $\cos A-\cos B=2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}.$

401.12. $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B).$

401.13. $\cos^2 A-\cos^2 B=\sin(A+B)\sin(B-A).$

401.14. $\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 B-\sin^2 A.$

401.15. $\sec^2 A+\csc^2 A=\sec^2 A\csc^2 A=\frac{1}{\sin^2 A\cos^2 A}.$

401.2. $p\cos A+q\sin A=r\sin(A+\theta),$

где

$$r=\sqrt{p^2+q^2},\quad \sin\theta=p/r,\quad \cos\theta=q/r$$

или

$$p\cos A+q\sin A=r\cos(A-\varphi),$$

где

$$r=\sqrt{p^2+q^2},\quad \cos\varphi=p/r,\quad \sin\varphi=q/r.$$

Заметим, что p и q могут быть положительными и отрицательными.

402.01. $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C.$

402.02. $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C-$
$-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C.$

402.03. $4\sin A\sin B\sin C=\sin(A+B-C)+\sin(B+C-A)+$
$+\sin(C+A-B)-\sin(A+B+C).$

402.04. $4\sin A\cos B\cos C=\sin(A+B-C)-\sin(B+C-A)+$
$+\sin(C+A-B)+\sin(A+B+C).$

402.05. $4\sin A\sin B\cos C=-\cos(A+B-C)+\cos(B+C-A)+$
$+\cos(C+A-B)-\cos(A+B+C).$

402.06. $4\cos A\cos B\cos C=\cos(A+B-C)+\cos(B+C-A)+$
$+\cos(C+A-B)+\cos(A+B+C).$

403.02. $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\operatorname{tg} A}{1+\operatorname{tg}^2 A}$.

403.03. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$.

403.04. $\sin 4A = \cos A\,(4\sin A - 8\sin^3 A)$.

403.05. $\sin 5A = 5\sin A - 20\sin^3 A + 16\sin^5 A$.

403.06. $\sin 6A = \cos A\,(6\sin A - 32\sin^3 A + 32\sin^5 A)$.

403.07. $\sin 7A = 7\sin A - 56\sin^3 A + 112\sin^5 A - 64\sin^7 A$.

403.10. Для целого положительного четного n

$$\sin nA = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\cos A\left[2^{n-1}\sin^{n-1}A - \frac{(n-2)}{1!}2^{n-3}\sin^{n-3}A + \frac{(n-3)(n-4)}{2!}2^{n-5}\sin^{n-5}A - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}2^{n-7}\sin^{n-7}A + \ldots\right],$$

ряд обрывается, когда коэффициент обращается в нуль.

403.11. Другой ряд:

$$\sin nA = n\cos A\left[\sin A - \frac{(n^2-2^2)}{3!}\sin^3 A + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5 A - \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{7!}\sin^7 A + \ldots\right]$$

[n четное и >0].

403.12. Для нечетного целого $n > 1$

$$\sin nA = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[2^{n-1}\sin^n A - \frac{n}{1!}2^{n-3}\sin^{n-2}A + \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\sin^{n-4}A - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}2^{n-7}\sin^{n-6}A + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}2^{n-9}\sin^{n-8}A - \ldots\right],$$

ряд обрывается, когда коэффициент обращается в нуль.

403.13. Другой ряд:

$$\sin nA = n\sin A - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 A + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 A - \ldots$$

[n нечетное и >0].

403.22 $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A =$
$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2 A}{1+\operatorname{tg}^2 A} = \frac{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{tg} A}.$$

403.23. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

403.24. $\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1.$

403.25. $\cos 5A = 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A.$

403.26. $\cos 6A = 32\cos^6 A - 48\cos^4 A + 18\cos^2 A - 1.$

403.27. $\cos 7A = 64\cos^7 A - 112\cos^5 A + 56\cos^3 A - 7\cos A.$

403.3. $\cos nA = 2^{n-1}\cos^n A - \frac{n}{1!}2^{n-3}\cos^{n-2} A +$
$$+ \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4} A - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}2^{n-7}\cos^{n-6} A +$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}2^{n-9}\cos^{n-8} A - \ldots$$

Формула обрывается, когда коэффициент обращается в нуль (n целое и > 2).

403.4. $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)}$. **403.5.** $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)}$.

404.12. $\sin^2 A = \frac{1}{2}(-\cos 2A + 1).$

404.13. $\sin^3 A = \frac{1}{4}(-\sin 3A + 3\sin A).$

404.14. $\sin^4 A = \frac{1}{8}\left(\cos 4A - 4\cos 2A + \frac{6}{2}\right).$

404.15. $\sin^5 A = \frac{1}{16}(\sin 5A - 5\sin 3A + 10\sin A).$

404.16. $\sin^6 A = \frac{1}{32}\left(-\cos 6A + 6\cos 4A - 15\cos 2A + \frac{20}{2}\right).$

404.17. $\sin^7 A = \frac{1}{64}(-\sin 7A + 7\sin 5A - 21\sin 3A + 35\sin A).$

404.22. $\cos^2 A = \frac{1}{2}(\cos 2A + 1).$

404.23. $\cos^3 A = \frac{1}{4}(\cos 3A + 3\cos A).$

404.24. $\cos^4 A = \frac{1}{8}\left(\cos 4A + 4\cos 2A + \frac{6}{2}\right).$

404.25. $\cos^5 A = \frac{1}{16}(\cos 5A + 5\cos 3A + 10\cos A)$.

404.26. $\cos^6 A = \frac{1}{32}\left(\cos 6A + 6\cos 4A + 15\cos 2A + \frac{20}{2}\right)$.

404.27. $\cos^7 A = \frac{1}{64}(\cos 7A + 7\cos 5A + 21\cos 3A + 35\cos A)$.

(Очевидно, **404** можно продолжить, используя биномиальные коэффициенты.)

405.01. $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 1}$.

405.02. $\operatorname{tg}(A-B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + 1}$.

405.03. $\operatorname{ctg}(A+B) = \frac{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} = \frac{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$.

405.04. $\operatorname{ctg}(A-B) = \frac{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A} = \frac{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}$.

405.05. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$. **405.06.** $\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$.

405.07. $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}$.

405.08. $\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \sin B}$.

405.09. $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\cos(A-B)}{\cos A \sin B}$.

405.10. $\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} B = \frac{\cos(A+B)}{\sin A \cos B}$.

406.02. $\operatorname{tg} 2A = \frac{2\operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A} = \frac{2\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg}^2 A - 1} = \frac{2}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}$.

406.03. $\operatorname{tg} 3A = \frac{3\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3\operatorname{tg}^2 A}$.

406.04. $\operatorname{tg} 4A = \frac{4\operatorname{tg} A - 4\operatorname{tg}^3 A}{1 - 6\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^4 A}$.

406.12. $\operatorname{ctg} 2A = \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 1}{2\operatorname{ctg} A} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{2\operatorname{tg} A} = \frac{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}{2}$.

406.13. $\operatorname{ctg} 3A = \frac{\operatorname{ctg}^3 A - 3\operatorname{ctg} A}{3\operatorname{ctg}^2 A - 1}$.

406.14. $\operatorname{ctg} 4A = \frac{\operatorname{ctg}^4 A - 6\operatorname{ctg}^2 A + 1}{4\operatorname{ctg}^3 A - 4\operatorname{ctg} A}$.

406.2. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.$

406.3. $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{1+\cos A}{\sin A}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}.$

407. $\sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ.$

$\sin 15^\circ = \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75^\circ.$

$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ.$

$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$

$\sin 36^\circ = \sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \cos 54^\circ.$

$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ.$

$\sin 54^\circ = \sin\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^\circ.$

$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ.$

$\sin 72^\circ = \sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \cos 18^\circ.$

$\sin 75^\circ = \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \cos 15^\circ.$

$\sin 90^\circ = \sin\frac{\pi}{2}=1 = \cos 0^\circ.$

$\sin 120^\circ=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\sin 240^\circ=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\cos 120^\circ=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$ $\cos 240^\circ=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$

$\sin 180^\circ=\sin\pi=0.$ $\sin 270^\circ=\sin\frac{3\pi}{2}=-1.$

$\cos 180^\circ=\cos\pi=-1.$ $\cos 270^\circ=\cos\frac{3\pi}{2}=0.$

408.01. $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$, где $i=+\sqrt{-1}$.

Заметим, что в электротехнической литературе вместо i часто употребляется j.

408.02. $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}).$

408.03. $\operatorname{tg} x = -i\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}\right) = -i\left(\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}\right).$

408.04. $e^{ix} = \cos x + i \sin x.$ *(Формула Эйлера.)*

408.05. $e^{z+ix} = e^{z}(\cos x + i \sin x).$

408.06. $a^{z+ix} = a^{z}[\cos(x \ln a) + i \sin(x \ln a)].$

408.07. $(\cos x + i \sin x)^{n} = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$

(Формула Муавра.)

408.08. $(\cos x + i \sin x)^{-n} = \cos nx - i \sin nx.$

408.09. $(\cos x + i \sin x)^{-1} = \cos x - i \sin x.$

408.10. $\sin(ix) = i \operatorname{sh} x.$

408.11. $\cos(ix) = \operatorname{ch} x.$

408.12. $\operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{th} x.$

408.13. $\operatorname{ctg}(ix) = -i \operatorname{cth} x.$

408.14. $\sec(ix) = \operatorname{sech} x.$

408.15. $\csc(ix) = -i \operatorname{csch} x.$

408.16. $\sin(x \pm iy) = \sin x \operatorname{ch} y \pm i \cos x \operatorname{sh} y.$

408.17. $\cos(x \pm iy) = \cos x \operatorname{ch} y \mp i \sin x \operatorname{sh} y.$

408.18. $\operatorname{tg}(x \pm iy) = \frac{\sin 2x \pm i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$

408.19. $\operatorname{ctg}(x \pm iy) = \frac{\sin 2x \mp i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}.$

409.01. $ce^{ix} = ce^{i(x+2k\pi)}$, где k — целое число или нуль.

$= c(\cos x + i \sin x).$

409.02. $1 = e^{0+2k\pi i} = \cos 0 + i \sin 0.$

Заметим, что

$$\cos 2k\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1.$$

409.03. $-1 = e^{0+(2k+1)\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi.$

Заметим, что

$$\ln(-1) = (2k+1)\pi i.$$

409.04. $\sqrt{1} = e^{2k\pi i/2}$. Эта величина может принять два различных значения в зависимости от того, четно или нечетно k. Этими значениями будут соответственно

$e^{2r\pi i} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,\quad e^{(2r+1)\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$

где r — целое число или нуль.

409.05. $\sqrt{-1}=e^{(2r+1)\pi i/2}$. Этот квадратный корень имеет два значения в зависимости от того, четно или нечетно r; эти значения соответственно

$$\cos\pi/2+i\sin\pi/2=i,\quad \cos 3\pi/2+i\sin 3\pi/2=-i.$$

409.06. $\sqrt[3]{1}=e^{2k\pi i/3}$. Этот корень имеет три различных значения:

$$e^{2r\pi i}=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$e^{(2r\pi+2\pi/3)\,i}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\omega,$$

$$e^{(2r\pi+4\pi/3)\,i}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\omega^2.$$

409.07. $\sqrt[4]{1}=e^{2k\pi i/4}$. Этот корень имеет четыре различных значения:

$$e^{2r\pi i}=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$e^{(2r\pi+2\pi/4)\,i}=\cos\pi/2+i\sin\pi/2=i,$$

$$e^{(2r\pi+4\pi/4)\,i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$e^{(2r\pi+6\pi/4)\,i}=\cos 3\pi/2+i\sin 3\pi/2=-i.$$

(См. **409.04** и **05.**)

409.08. $\sqrt{i}=e^{(4s+1)\pi i/4}$ (получается из **409.05** при $r=2s$). Этот корень имеет два значения

$$e^{\pi i/4}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\quad (s \text{ четно}),$$

$$e^{5\pi i/4}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\quad (s \text{ нечетно}).$$

409.09.

$$\sqrt[n]{1}=e^{2k\pi i/n}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

принимает n различных значений, соответствующих различным значениям k. Уравнение $\omega^n=1$ имеет n различных корней:

$$\omega_0=\cos 0+i\sin 0=1,\qquad \omega_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\omega_2=\cos 2\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin 2\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ \ldots,\ \omega_k=\cos k\frac{2\pi}{n}+i\sin k\frac{2\pi}{n},$$

$$\omega_{n-1}=\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}+i\sin(n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Заметим, что согласно **408.07**

$$\omega_2=\omega_1^2,\qquad \omega_3=\omega_1^3,\qquad \omega_k=\omega_1^k,\qquad \omega_0=\omega_1^n.$$

409.10. Все n корней n-й степени из какого-либо числа могут быть получены из любого корня умножением этого корня на n корней из единицы, которые указаны в **409.09.**