I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. $$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}x^r + \ldots$$

Здесь и далее всюду полагаем $0! = 1$. Если n — целое положительное число, то выражение состоит из конечного числа членов. В противном случае ряд сходится при $x^2 < 1$; причем, если $n > 0$, то ряд сходится также при $x^2 = 1$.

2. Коэффициент при x^r в **1** обозначается $\binom{n}{r}$ или C_n^r.

Величины этих коэффициентов даются в следующей таблице.

Таблица биномиальных коэффициентов C_n^r.

n \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Сумма двух соседних чисел в любой строке равна числу, находящемуся в следующей строке под правым слагаемым.

Подробную таблицу см. [26].

3. $$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^r\frac{n!}{(n-r)!\,r!}x^r + \ldots$$

(См. примечание к **1.**)

4. $$(a \pm x)^n = a^n\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^n.$$

4.2. $$(1 \pm x)^2 = 1 \pm 2x + x^2.$$

4.3. $$(1 \pm x)^3 = 1 \pm 3x + 3x^2 \pm x^3.$$

4.4. $$(1 \pm x)^4 = 1 \pm 4x + 6x^2 \pm 4x^3 + x^4,$$

и так далее, используя коэффициенты из таблицы 2.

5.1. $$(1 \pm x)^{1/4} = 1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \pm \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

5.2. $$(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

5.3. $$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

5.4. $$(1 \pm x)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5 + \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

5.5. $$(1 \pm x)^{5/2} = 1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5 - \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

6. $$(1 + x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^r\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}x^r + \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

7. $$(1 - x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}x^r + \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

8. $$(a \pm x)^{-n} = a^{-n}\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^{-n}.$$

9.01. $$(1 \pm x)^{-1/4} = 1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2 \mp \frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.02. $$(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 \mp \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.03. $$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.04. $$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.05. $$(1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.06. $$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.07. $$(1 \pm x)^{-5/2} = 1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.08. $$(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp \frac{1}{1\cdot 2}\{2\cdot 3x \mp 3\cdot 4x^2 + 4\cdot 5x^3 \mp 5\cdot 6x^4 + \ldots\}, \qquad [x^2 < 1].$$

9.09. $$(1 \pm x)^{-4} = 1 \mp \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\{2\cdot 3\cdot 4x \mp 3\cdot 4\cdot 5x^2 + 4\cdot 5\cdot 6x^3 \mp 5\cdot 6\cdot 7x^4 + \ldots\}, \qquad [x^2 < 1].$$

9.10. $$(1 \pm x)^{-5} = 1 \mp \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5x \mp 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^2 + 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7x^3 \mp 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^4 + \ldots\}, \qquad [x^2 < 1].$$

10.

$2! =$	2	$1/2! =$	0,5
$3! =$	6	$1/3! =$	0,16666 66667
$4! =$	24	$1/4! =$	0,04166 66667
$5! =$	120	$1/5! =$	0,00833 33333
$6! =$	720	$1/6! =$	0,00138 88889
$7! =$	5040	$1/7! =$	$0{,}19841\,26984\cdot 10^{-3}$
$8! =$	40320	$1/8! =$	$0{,}24801\,58730\cdot 10^{-4}$
$9! =$	3 62880	$1/9! =$	$0{,}27557\,31922\cdot 10^{-5}$
$10! =$	36 28800	$1/10! =$	$0{,}27557\,31922\cdot 10^{-6}$
$11! =$	399 16800	$1/11! =$	$0{,}25052\,10839\cdot 10^{-7}$
$12! =$	4790 01600	$1/12! =$	$0{,}20876\,75699\cdot 10^{-8}$

Более подробную таблицу см. [18].

11. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}.$$

Эта формула позволяет получать приближенные значения $n!$ при больших n. Результат получается с избытком в $0{,}7\%$ для $n=12$ и $0{,}4\%$ для $n=20$ (см. также **851.4** и **850.4**).

12.

n	2^n	n	2^n	n	2^{-n}	
2	4	15	32 768	2	0,25	
3	8	16	65 536	3	0,125	
4	16	17	131 072	4	0,0625	
5	32	18	262 144	5	0,03125	
6	64	19	524 288	6	0,015625	
7	128	20	1 048 576	7	0,78125	$\cdot 10^{-2}$
8	256	21	2 097 152	8	0,39062 5	$\cdot 10^{-2}$
9	512	22	4 194 304	9	0,19531 25	$\cdot 10^{-2}$
10	1 024	23	8 388 608	10	0,97656 25	$\cdot 10^{-3}$
11	2 048	24	16 777 216	11	0,48828 125	$\cdot 10^{-3}$
12	4 096	25	33 554 432	12	0,24414 0625	$\cdot 10^{-3}$
13	8 192	26	67 108 864	13	0,12207 03125	$\cdot 10^{-3}$
14	16 384	27	134 217 728	14	0,61035 15625	$\cdot 10^{-4}$

15.1. $$(a+b+c)^2\equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

15.2. $$(a+b-c)^2\equiv a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca.$$

15.3. $$(a-b-c)^2\equiv a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca.$$

16. $$(a+b+c+d)^2\equiv a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+\\+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

17. $$(a+b+c)^3\equiv a^3+b^3+c^3+6abc+\\+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2).$$

20.1. $$a+x\equiv(a^2-x^2)/(a-x).$$

20.11. $$1+x\equiv(1-x^2)/(1-x).$$

20.2. $$a^2+ax+x^2\equiv(a^3-x^3)/(a-x).$$

20.3. $$a^3+a^2x+ax^2+x^3\equiv(a^4-x^4)/(a-x)\equiv\\\equiv(a^2+x^2)(a+x).$$

20.4. $$a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4\equiv(a^5-x^5)/(a-x).$$

20.5. $$a^5+a^4x+a^3x^2+a^2x^3+ax^4+x^5\equiv\\\equiv(a^6-x^6)/(a-x)\equiv(a^3+x^3)(a^2+ax+x^2).$$

21.1. $$a-x\equiv(a^2-x^2)/(a+x).$$

21.2. $$a^2-ax+x^2\equiv(a^3+x^3)/(a+x).$$

21.3. $$a^3-a^2x+ax^2-x^3\equiv(a^4-x^4)/(a+x)\equiv$$
$$\equiv(a^2+x^2)(a-x).$$

21.4. $$a^4-a^3x+a^2x^2-ax^3+x^4\equiv(a^5+x^5)/(a+x).$$

21.5. $$a^5-a^4x+a^3x^2-a^2x^3+ax^4-x^5\equiv$$
$$\equiv(a^6-x^6)/(a+x)\equiv(a^3-x^3)(a^2-ax+x^2).$$

22. $$a^4+a^2x^2+x^4\equiv(a^6-x^6)/(a^2-x^2)\equiv$$
$$\equiv(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2).$$

22.1. $$a^4-a^2x^2+x^4\equiv(a^6+x^6)/(a^2+x^2).$$

23. $$a^4+x^4\equiv(a^2+x^2)^2-2a^2x^2\equiv$$
$$\equiv(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)(a^2-ax\sqrt{2}+x^2).$$

25. *Арифметическая прогрессия первого порядка* (с постоянными первыми разностями) из n членов
$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\ \ldots+\{a+(n-1)d\}\equiv$$
$$\equiv na+\frac{1}{2}n(n-1)d\equiv$$
$$\equiv\frac{n}{2}\ (1\text{-й член}+n\text{-й член}).$$

26. *Геометрическая прогрессия* из n членов
$$a+ar+ar^2+ar^3+\ \ldots\ +ar^{n-1}\equiv a(1-r^n)/(1-r)\equiv$$
$$\equiv a(r^n-1)/(r-1).$$

26.1. Если $r^2<1$, предел суммы бесконечного числа членов будет $a/(1-r)$.

27. Обратные величины членов арифметической прогрессии первого порядка образуют (по определению) *гармоническую прогрессию.* Так,
$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a+d},\quad \frac{1}{a+2d},\quad \ldots,\quad \frac{1}{a+(n-1)d}$$
есть гармоническая прогрессия.

28.1. *Средняя арифметическая* n величин:
$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n).$$

28.2. *Средняя геометрическая* n величин:
$$(a_1a_2a_3\ldots a_n)^{1/n}.$$

28.3. H — *средняя гармоническая* n величин определяется следующим образом:
$$\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

28.4. Средняя арифметическая некоторого числа положительных величин больше или равна их средней геометрической, которая в свою очередь больше или равна их средней гармонической.

29. *Арифметическая прогрессия k-го порядка* (k-е разности постоянны).

Последовательность: $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_n$.

Первые разности: $d'_1,\ d'_2,\ d'_3, \ldots,$

где $d'_1 = u_2 - u_1,\ d'_2 = u_3 - u_2$ и т. д.

Вторые разности: $d''_1,\ d''_2,\ d''_3, \ldots,$

где $d''_1 = d'_2 - d'_1$ и т. д.

Сумма n членов последовательности равна

$$\frac{n!}{(n-1)!\,1!}\,u_1 + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}\,d'_1 + \frac{n!}{(n-3)!\,3!}\,d''_1 + \ldots$$

29.01. Если таблица функции u_n дана для равноотстоящих значений аргумента с интервалом h, а именно $f(a) = u_1$, $f(a+h) = u_2$, $f(a+2h) = u_3$ и т. д., то

$$f(a+ph) = u_1 + pd'_1 + \frac{p(p-1)}{2!}\,d''_1 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\,d'''_1 + \ldots,$$

где $p<1$, а d'_1, d''_1 и т. д. даны в **29.** Коэффициенты при d'_1, d''_1, d'''_1 и т. д. называются *интерполяционными коэффициентами Грегори — Ньютона.*

Численные значения этих коэффициентов см. [25].

29.1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1).$

29.2.
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1).$$

29.3.
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 = \frac{n^2}{4}(n^2 + 2n + 1).$$

29.4.
$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1).$$

29.9. $$\sum_{u=1}^{n} u^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{B_1}{2!} p n^{p-1} - \frac{B_2}{4!} p(p-1)(p-2) n^{p-3} + \ldots,$$

отбрасывая члены с n^0 и последующие. Величины B_1, $B_2, \ldots$ см. **45.**

Приведенные формулы можно использовать для нахождения суммы рядов, n-й член которых выражается через n, n^2, n^3 и т. д.

30.1. $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

30.2. $$1 + 8 + 16 + 24 + 32 + \ldots + 8(n-1) = (2n-1)^2.$$

33.1. $$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

33.2. $$1 + ax + (a+b)x^2 + (a+2b)x^3 + \ldots = 1 + \frac{ax + (b-a)x^2}{(1-x)^2}.$$

33.3. $$1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

33.4. $$1 + 3^2x + 5^2x^2 + 7^2x^3 + \ldots = \frac{1+6x+x^2}{(1-x)^3}.$$

35. $$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx \quad [a,\ b > 0].$$

35.1. $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$ [См. **120** и **48.31.**]

35.2. $$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \ldots = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2\right).$$ [См. **165.01.**]

35.3. $$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \ldots = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right).$$ [См. **165.11.**]

35.4. $$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \ldots = \frac{1}{4\sqrt{2}}\{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)\}.$$ [См. **170.**]

38. Степенной ряд для $f(h)$ имеет вид:

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\frac{h^3}{3!}f'''(0)+\ldots$$

(*Ряд Маклорена.*)

38.1. $$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\frac{h^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n,$$

где при некотором значении θ, заключенном между 0 и 1,

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\theta h),\quad \text{или}\quad \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta h).$$

39. $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots$$

(*Ряд Тейлора.*)

39.1. $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

где при некотором значении θ, заключенном между 0 и 1,

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),\quad \text{или}\quad \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h).$$

40. $$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\left\{h\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right\}+\frac{1}{2!}\left\{h^2\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial y^2}\right\}+\frac{1}{3!}\left\{h^3\frac{\partial^3 f(x,\ y)}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f(x,\ y)}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f(x,\ y)}{\partial y^3}\right\}+\ldots+R_n,$$

где при некоторых значениях θ_1 и θ_2, заключенных между 0 и 1,

$$R_n=\frac{1}{n!}\left\{h^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}+nh^{n-1}k\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}+\frac{n(n-1)}{2!}h^{n-2}k^2\frac{\partial^n}{\partial x^{n-2}\partial y^2}+\ldots+k^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}\right\}f(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k).$$

42.1. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

42.2. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

42.3. Число делится на 2^n, если число, составленное из n его последних цифр, делится на 2^n.