

Интегралы, содержащие $\sin x$

$$430.10. \quad \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

$$430.101. \quad \int \sin(a + bx) \, dx = -\frac{1}{b} \cos(a + bx).$$

$$430.102. \quad \int \sin \frac{x}{a} \, dx = -a \cos \frac{x}{a}.$$

$$430.11. \quad \int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x.$$

$$430.12. \quad \int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x.$$

$$430.13. \quad \int x^3 \sin x \, dx = (3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x.$$

$$430.14. \quad \int x^4 \sin x \, dx = (4x^3 - 24x) \sin x - (x^4 - 12x^2 + 24) \cos x.$$

$$430.15. \quad \int x^5 \sin x \, dx = (5x^4 - 60x^2 + 120) \sin x - \\ - (x^5 - 20x^3 + 120x) \cos x.$$

$$430.16. \quad \int x^6 \sin x \, dx = (6x^5 - 120x^3 + 720x) \sin x - \\ - (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) \cos x.$$

$$430.19. \quad \int x^m \sin x \, dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x \, dx.$$

[См. 440.]

$$430.20. \quad \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}.$$

$$430.21. \quad \int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}.$$

$$430.22. \quad \int x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4}.$$

$$430.23. \quad \int x^3 \sin^2 x \, dx = \frac{x^4}{8} - \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3x}{8} \right) \sin 2x - \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{3}{16} \right) \cos 2x.$$

$$430.30. \quad \int \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x.$$

$$430.31. \quad \int x \sin^3 x \, dx = \frac{x \cos 3x}{12} - \frac{\sin 3x}{36} - \frac{3}{4} x \cos x + \frac{3}{4} \sin x.$$

(Выражая $\sin^3 x$ согласно 404.13.)

$$430.40. \quad \int \sin^4 x \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$$

$$430.50. \quad \int \sin^5 x \, dx = -\frac{5 \cos x}{8} + \frac{5 \cos 3x}{48} - \frac{\cos 5x}{80}.$$

$$430.60. \quad \int \sin^6 x \, dx = \frac{5x}{16} - \frac{15 \sin 2x}{64} + \frac{3 \sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192}.$$

$$430.70. \quad \int \sin^7 x \, dx = -\frac{35 \cos x}{64} + \frac{7 \cos 3x}{64} - \frac{7 \cos 5x}{320} + \frac{\cos 7x}{448}.$$

(Интегрируя выражения из **404.**)

$$431.11. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x} = \text{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

Таблицу численных значений этой функции см. [22].

$$431.12. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x \, dx}{x}. \quad [\text{См. } 441.11.]$$

$$431.13. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x^3} = -\frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sin x \, dx}{x}. \quad [\text{См. } 431.11.]$$

$$431.14. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x^4} = -\frac{\sin x}{3x^3} - \frac{\cos x}{6x^2} + \frac{\sin x}{6x} - \frac{1}{6} \int \frac{\cos x \, dx}{x}. \quad [\text{См. } 441.11.]$$

$$431.19. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x^m} = -\frac{\sin x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{\cos x \, dx}{x^{m-1}}.$$

$$431.21. \quad \int \frac{\sin^2 x \, dx}{x} = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2x \, d(2x)}{2x}. \quad [\text{См. } 441.11.]$$

$$431.31. \quad \int \frac{\sin^3 x \, dx}{x} = \frac{3}{4} \int \frac{\sin x \, dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{\sin 3x \, d(3x)}{3x}. \quad [\text{См. } 431.11.]$$

$$431.9. \quad \int \frac{\sin^n x \, dx}{x^m}. \quad \text{Выразить } \sin^n x \text{ согласно } 404 \text{ и интегрировать почленно согласно } 431.1 \text{ и } 441.1.$$

$$432.10. \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x \, dx = \ln \left| \text{tg } \frac{x}{2} \right| = \\ = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \ln |\csc x - \text{ctg } x| = \\ = \lambda \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \text{ (лямбда-функция)}. \quad [\text{См. } 641 \text{ и } 603.6.]$$

См. рисунок на стр. 86.

$$432.11. \quad \int \frac{x \, dx}{\sin x} = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7x^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31x^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127x^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots \\ \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n x^{2n+1} + \dots \quad [\text{См. } 45.]$$

$$432.12. \quad \int \frac{x^2 dx}{\sin x} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3!} + \frac{7x^6}{3 \cdot 6 \cdot 5!} + \frac{31x^8}{3 \cdot 8 \cdot 7!} + \frac{127x^{10}}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8!} + \dots$$

$$\dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+2)(2n)!} B_n x^{2n+2} + \dots \quad [\text{См. 45.}]$$

432.19. $\int \frac{x^m dx}{\sin x}$. Разложить $\frac{1}{\sin x}$ согласно 415.06, умножить на x^m и интегрировать [$m > 0$].

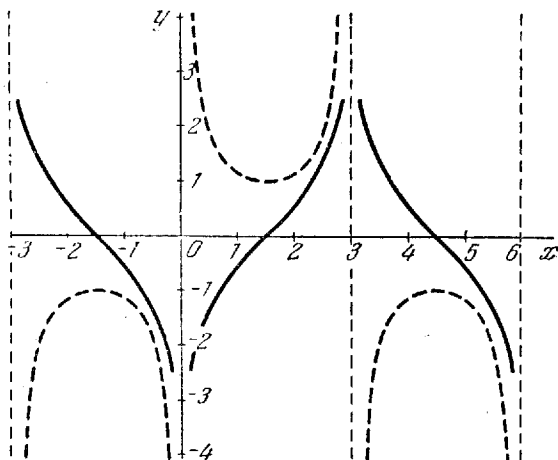


Рис. 432.10. Графики функций $y = \csc x$ (пунктирная линия) и $y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$ (сплошная линия).

$$432.20. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x.$$

$$432.21. \quad \int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x|.$$

$$432.30. \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$432.31. \quad \int \frac{x dx}{\sin^3 x} = -\frac{x \cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\sin x}. \quad [\text{См. 432.11.}]$$

$$432.40. \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}.$$

$$432.41. \quad \int \frac{x dx}{\sin^4 x} = -\frac{x \cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{6 \sin^2 x} - \frac{2}{3} x \operatorname{ctg} x + \frac{2}{3} \ln |\sin x|.$$

$$432.50. \quad \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$432.60. \quad \int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{\cos x}{5 \sin^5 x} - \frac{4 \cos x}{15 \sin^3 x} - \frac{8}{15} \operatorname{ctg} x.$$

$$432.90. \quad \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \operatorname{csc}^n x \, dx = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \quad [n > 1].$$

$$432.91. \quad \int \frac{x \, dx}{\sin^n x} = -\frac{x \cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{1}{(n-1)(n-2) \sin^{n-2} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x \, dx}{\sin^{n-2} x} \quad [n > 2].$$

$$433.01. \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x} = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$433.02. \quad \int \frac{dx}{1 - \sin x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$433.03. \quad \int \frac{x \, dx}{1 + \sin x} = -x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$433.04. \quad \int \frac{x \, dx}{1 - \sin x} = x \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$433.05. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin x} = x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$433.06. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{1 - \sin x} = -x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$433.07. \quad \int \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$433.08. \quad \int \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$434.01. \quad \int \frac{dx}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$434.02. \quad \int \frac{dx}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$434.03. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$434.04. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(1 - \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$434.05. \quad \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{3 \sin^2 x - 1}{\sin^2 x + 1} \right). \quad [\text{См. 436.6.}]$$

$$434.06. \quad \int \frac{dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x. \quad [\text{См. } 442.20.]$$

$$435. \quad \int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$$

[$m^2 \neq n^2$, Если $m^2 = n^2$, то см. 430.20.]

$$436.00. \quad \int \frac{dx}{a + b \sin x} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad [a^2 > b^2],$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \right| \quad [b^2 > a^2],$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

$$\left[b^2 > a^2, \left| a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b \right| < \sqrt{b^2 - a^2} \right],$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Arcth} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

$$\left[b^2 > a^2, \left| a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b \right| > \sqrt{b^2 - a^2} \right].$$

Подынтегральная функция обращается в бесконечность (если $b^2 > a^2$) при $x = n\pi + (-1)^n \arcsin \left(-\frac{a}{b} \right)$.

$$436.01. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{a + b \sin x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

$$436.02. \quad \int \frac{dx}{\sin x (a + b \sin x)} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

$$436.03. \quad \int \frac{dx}{(a + b \sin x)^2} = \frac{b \cos x}{(a^2 - b^2)(a + b \sin x)} + \frac{a}{a^2 - b^2} \int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

$$436.04. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(a + b \sin x)^2} = \frac{a \cos x}{(b^2 - a^2)(a + b \sin x)} + \frac{b}{b^2 - a^2} \int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

[К 436.01—436.04 см. 436.00.]

$$436.5. \quad \int \frac{dx}{a^2 + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{a \sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} x}{a}.$$

436.6. Когда $a = b = 1$,

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x).$$

Другое выражение, отличающееся на константу, дано в 434.05.

436.7.
$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{a \sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{tg} x}{a} \quad [a^2 > b^2],$$

$$= \frac{1}{2a \sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} x + a}{\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} x - a} \right| \quad [b^2 > a^2].$$

Если $b^2 = a^2$, см. 434.06.

437.1.
$$\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{m} \operatorname{arcsin} \frac{m \cos x}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

437.2.
$$\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{m} \ln |m \cos x + \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}|.$$

437.3.
$$\int (\sin x) \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x} \, dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x} - \frac{1 + m^2}{2m} \operatorname{arcsin} \frac{m \cos x}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

437.4.
$$\int (\sin x) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x} \, dx = -\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x} -$$

$$-\frac{1 - m^2}{2m} \ln |m \cos x + \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}|.$$