группа конечной или бесконечной. Но в некоторых случаях приходится проводить отдельные доказательства. Конечные группы несколько проще; из бесконечных групп мы затронем лишь «непрерывные», которые весьма часто встречаются при анализе интересующих нас физических задач. Так называются группы, элементы которых обозначаются не дискретными символами a или b, а непрерывно меняющимися параметрами. В этом случае при малом изменении параметра можно непрерывно перейти от одного элемента группы к другому.

§ 2. ПРИМЕРЫ ГРУПП

Простейший пример элементов группы — обычные числа с обычным законом умножения; два наших первых примера именно таковы.

1. Два числа 1 и —1 образуют группу. Единичный элемент — это, естественно, 1. Элемент, обратный единичному, опять-таки единица, а элемент —1 обратен сам себе. Эти соотношения записаны в табл. 2.1 (таблице группового умножения).

Таблица 2.1

G_a \ G_b	1	—1
1	1	—1
—1	—1	1

2. Несколько более обширную таблицу того же рода образует набор чисел 1, —1, i и $-i$; результаты их умножения представлены в табл. 2.2.

Обе эти группы «циклические», т. е. все их элементы могут быть получены как степени одного элемента. Во втором примере все 4 элемента даются выражением i^k, где $k=0, 1, 2, 3$. Увеличивая показатель степени k далее, мы, очевидно, получим повторение того же цикла. Обе рассмотренные группы абелевы, поскольку мы приняли обычный закон умножения. Нетрудно сообразить, что и всякая циклическая группа должна быть абелевой.

Таблица 2.2

G_a \ G_b	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

При изучении симметрии физических систем весьма важно знать их поведение при поворотах. Разнообразные наборы вращений образуют группы, и к некоторым примерам таких групп мы и переходим. Закон умножения здесь таков: если поворот R_1 переводит систему из положения A в положение B, а поворот R_2 — из положения B в положение C, то произведение $\mathsf{R}_1\mathsf{R}_2$ переводит систему из A в C. Здесь мы впервые сталкиваемся с примером неабелевой группы: хотя при вращении вокруг одной и той же оси $\mathsf{R}_2\mathsf{R}_1=\mathsf{R}_1\mathsf{R}_2$, в общем случае $\mathsf{R}_2\mathsf{R}_1\neq\mathsf{R}_1\mathsf{R}_2$. Таким образом, вращения, вообще говоря, не коммутируют.

Чтобы убедиться в некоммутативности вращений, выберем в качестве операции R_1 поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси z, а в качестве операции R_2 — поворот на π вокруг оси y. (Поворотом на положительный угол относительно направленной оси мы, как это общепринято, будем считать поворот, соответствующий вращению правого винта, т. е. вращению по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси в ее положительном направлении.) Если внимательно проследить за перемещением каждой оси при последовательных поворотах, то мы увидим, что поворот $\mathsf{R}_2\mathsf{R}_1$ аналогичен повороту на π вокруг оси $(1, 1, 0)$, тогда как $\mathsf{R}_1\mathsf{R}_2$ — это поворот на π вокруг оси $(-1, 1, 0)$. Но начнем с более простых примеров.

3. Пусть E — тождественная операция (поворот на нулевой угол), а R — поворот на угол π вокруг оси z. Тогда набор из E и R образует группу с таблицей умно-

жения, указанной в табл. 2.3. (Такая группа обычно обозначается через C_2.)

Таблица 2.3

G_a \ G_b	E	R
E	E	R
R	R	E

4. Пусть операция I — инверсия, т. е. операция, изменяющая направление всякого вектора на обратное. Очевидно, что $I^2=E$ (тождественная операция), так что пара E, I образует группу; она называется группой S_2.

5. Если R_1 и R_2 — повороты вокруг оси z на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$, то совокупность операций E, R_1 и R_2 есть группа, называемая группой C_3. Ее таблицу умножения легко вывести (табл. 2.4).

Таблица 2.4

G_a \ G_b	E	R_1	R_2
E	E	R_1	R_2
R_1	R_1	R_2	E
R_2	R_2	E	R_1

6. Группу образует совокупность операций E, R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5, если R_1 и R_2 — повороты на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ вокруг оси z, а остальные элементы R_3, R_4 и R_5 — повороты на угол π вокруг каждой из трех осей, лежащих в плоскости xy (рис. 2.1). Такая группа D_3 с геометрической точки зрения есть группа вращений равностороннего треугольника, приводящих его в положения, неотличимые от исходного. Говоря «неотличимые», мы предполагаем, что треугольник не имеет меток и вообще

ничего, что нарушало бы его идеальную симметрию. Такое преобразование геометрической фигуры называют операцией «собственного совмещения»; если разрешены отражения, то говорят о «несобственном совмещении».

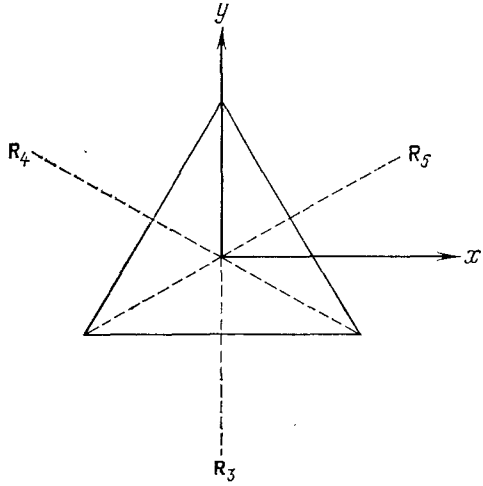
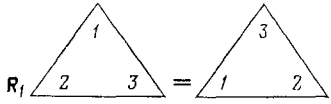
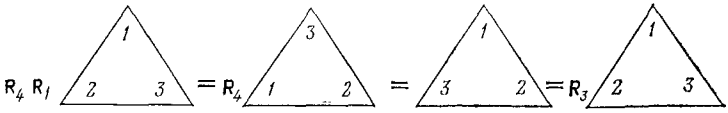


Рис. 2.1.

Для наглядности мы все же вообразим, что углы треугольника обозначены цифрами 1, 2 и 3, и посмотрим, как эти цифры перемещаются при поворотах. Таким путем можно построить таблицу умножения (табл. 2.5). Например,





так что $R_4R_1=R_3$.

Выяснить на этом и других аналогичных примерах, образует ли набор элементов группу, можно по таблице

Таблица 2.5

G_a \ G_b	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
E	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	R_1	R_2	E	R_4	R_5	R_3
R_2	R_2	E	R_1	R_5	R_3	R_4
R_3	R_3	R_5	R_4	E	R_2	R_1
R_4	R_4	R_3	R_5	R_1	E	R_2
R_5	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	E

умножения. Поскольку любая строка и любой столбец таблицы обозначены одним из элементов набора, условие 1 образования группы выполняется. Единичный элемент появляется в каждой строке и в каждом столбце один и только один раз — этим подтверждается справедливость условия 4. Условие 3 выполняется очевидно, а условие 2 справедливо для любых вращений. Обратно, уже определение нашей совокупности как набора *всех* собственных операций совмещения равностороннего треугольника с собой гарантирует, что этот набор является группой. Как произведение двух операций совмещения, так и действие, обратное любой из них, естественно, являются операциями совмещения.

7. Треугольник из приведенного выше примера также не изменяется при отражении в его плоскости. Эту операцию обычно обозначают через σ_h, считая, что плоскость треугольника горизонтальна (horizontal). Введение нового элемента влечет за собой появление других новых элементов — произведений $R_1\sigma_h$, $R_2\sigma_h$, . . ., $R_5\sigma_h$. Геометрически ясно, что произведение $R_3\sigma_h$ — это просто отражение в вертикальной плоскости, в которой лежит ось R_3; то же самое верно для $R_4\sigma_h$ и $R_5\sigma_h$. Легко убедиться, что набор из 12 элементов

$$E,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4,\ R_5,\ \sigma_h,\ R_1\sigma_h,\ R_2\sigma_h,\ \sigma_3\ \sigma_4,\ \sigma_5,$$

где $\sigma_3 = R_3\sigma_h$ и т. д., образует группу, в которой содержится группа D_3; эту новую группу обычно обозначают

символом D_{3h}. Ее таблицу умножения можно получить из табл. 2.5 и соотношения $\sigma^2=\mathsf{E}$ (двукратное отражение в плоскости эквивалентно операции идентичности). Заметим, что группа D_{3h} не содержит инверсии I, хотя несобственные элементы (не являющиеся поворотами) в ней содержатся. Очевидно, что инверсия треугольника не переводит его в себя. Элементы типа $\mathsf{R}_1\sigma_h$, содержащие вращения в сочетании с отражением в плоскости, перпендикулярной оси вращения, называются зеркально-поворотными.

8. Совокупность всех вращений относительно заданной оси образует непрерывную группу, называемую группой $\mathcal{R}_2$. Ее элементы обозначаются символами $\mathsf{R}(a)$, где a — угол поворота, $0\leqslant a<2\pi$. В этом случае таблица умножения должна быть бесконечной, но в действительности мы можем написать общую формулу для произведения двух любых элементов. Из геометрических соображений очевидно, что

$$\mathsf{R}(a)\,\mathsf{R}(b)=\mathsf{R}(a+b), \tag{2.6}$$

причем

$$\mathsf{R}(a+2\pi)=\mathsf{R}(a).$$

Таким образом, элементы коммутируют и обратный элемент есть

$$\mathsf{R}^{-1}(a)=\mathsf{R}(2\pi-a). \tag{2.7}$$

9. Обобщив предыдущий пример на случай трех измерений, мы получим набор всевозможных вращений вокруг осей, проходящих через данную точку, который также будет группой. Здесь для описания вращений требуется три параметра. Обычный способ параметризации включает задание двух полярных углов, фиксирующих ось вращения, и угла поворота относительно этой оси. Операция вращения в этом случае обозначается через $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)$, где индекс $\mathbf{k}$ соответствует единичному вектору в направлении оси вращения. Вместо этого можно также ввести эйлеровы углы, описывающие положение тела по отношению к некоторой исходной позиции. Данная группа, обозначаемая символом $\mathcal{R}_3$, состоит из совокупности собственных операций совмещения сферы, и мы еще вернемся к ней в гл. 7.

10. Набор всех перестановок P из n объектов образует группу, называемую обычно «симметрической группой» и обозначаемую символом $\mathscr{S}_n$. Произведение двух перестановок по определению есть такая перестановка, которая прямо переводит исходное расположение в конечное. Перестановку удобно обозначать символом

$$\mathsf{P}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n\end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

указывающим, что элемент i заменяется элементом p_i. Следовательно, числа $p_1\ p_2\ p_3\ \dots\ p_n$ — это переставленные числа $1\ 2\ 3\ \dots\ n$. Таким образом, существует $n!$ элементов, поскольку p_1 можно выбрать n способами, p_2 можно выбрать $(n-1)$ способами и т. д. Так обычно и делают, но записывать числа верхнего ряда P в порядке возрастания вовсе не обязательно. Так, например, два символа

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

обозначают одну и ту же перестановку, так что сразу же можно записать выражение для элемента, обратного P:

$$\mathsf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & n\end{pmatrix}.$$

В качестве упражнения составим таблицу умножения для $n=3$. Для краткости введем обозначения

$$\mathsf{E}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \mathsf{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \mathsf{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$\mathsf{P}_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \mathsf{P}_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad \mathsf{P}_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Получим, например,

$$\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\mathsf{P}_4.$$

Здесь мы для доказательства переставили столбцы в P_1 так, чтобы верхняя строка матрицы P_1 совпала с нижней строкой матрицы P_2. Поэтому можно написать общее соотношение

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}= \\ =\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

которое будет фактически определением произведения двух перестановок. Таким путем мы построим таблицу умножения (табл. 2.6).

Таблица 2.6

G_a \ G_b	E	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
E	E	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	E	P_4	P_5	P_2	P_3
P_2	P_2	P_5	E	P_4	P_3	P_1
P_3	P_3	P_4	P_5	E	P_1	P_2
P_4	P_4	P_3	P_1	P_2	P_5	E
P_5	P_5	P_2	P_3	P_1	E	P_4

§ 3. ИЗОМОРФИЗМ

Данное выше определение группы столь абстрактно, что возможны случаи, когда две группы, элементы которых определены совершенно по-разному, тем не менее очень сходны между собой и алгебраически могут рассматриваться как одна и та же группа. На языке математики это выражается так: мы называем две группы $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ изоморфными, если между элементами G_a группы $\mathscr{G}$ и элементами H_a группы $\mathscr{H}$ можно установить взаимно однозначное соответствие $\mathsf{G}_a \leftrightarrow \mathsf{H}_a$, такое, что из равенства $\mathsf{G}_a\mathsf{G}_b=\mathsf{G}_d$ следует равенство $\mathsf{H}_a\mathsf{H}_b=\mathsf{H}_d$. Если соответствие такого типа существует, но не является