Здесь мы для доказательства переставили столбцы в P_1 так, чтобы верхняя строка матрицы P_1 совпала с нижней строкой матрицы P_2. Поэтому можно написать общее соотношение

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}= \\ =\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

которое будет фактически определением произведения двух перестановок. Таким путем мы построим таблицу умножения (табл. 2.6).

Таблица 2.6

G_a \ G_b	E	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
E	E	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	E	P_4	P_5	P_2	P_3
P_2	P_2	P_5	E	P_4	P_3	P_1
P_3	P_3	P_4	P_5	E	P_1	P_2
P_4	P_4	P_3	P_1	P_2	P_5	E
P_5	P_5	P_2	P_3	P_1	E	P_4

§ 3. ИЗОМОРФИЗМ

Данное выше определение группы столь абстрактно, что возможны случаи, когда две группы, элементы которых определены совершенно по-разному, тем не менее очень сходны между собой и алгебраически могут рассматриваться как одна и та же группа. На языке математики это выражается так: мы называем две группы $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ изоморфными, если между элементами G_a группы $\mathscr{G}$ и элементами H_a группы $\mathscr{H}$ можно установить взаимно однозначное соответствие $\mathsf{G}_a \leftrightarrow \mathsf{H}_a$, такое, что из равенства $\mathsf{G}_a\mathsf{G}_b=\mathsf{G}_d$ следует равенство $\mathsf{H}_a\mathsf{H}_b=\mathsf{H}_d$. Если соответствие такого типа существует, но не является

взаимно однозначным, то группы называются гомоморфными. Таким образом, две изоморфные группы должны иметь одну и ту же таблицу умножения; возможно лишь иное расположение групповых элементов. Поскольку при изучении симметрии для нас интересны в основном алгебраические свойства групп, определяемые их таблицами умножения, понятие изоморфизма позволяет экономить время и находить полезные аналогии, выявляя изоморфизм групп.

С некоторыми случаями изоморфизма мы уже сталкивались в примерах § 2. Так, взаимно однозначное соответствие $1 \leftrightarrow \mathsf{E}$ и $-1 \leftrightarrow \mathsf{R}$ указывает на изоморфизм групп, разобранных в примерах 1 и 3, а соответствие $\mathsf{R}_1 \leftrightarrow \mathsf{P}_5$, $\mathsf{R}_2 \leftrightarrow \mathsf{P}_4$, $\mathsf{R}_3 \leftrightarrow \mathsf{P}_1$, $\mathsf{R}_4 \leftrightarrow \mathsf{P}_2$ и $\mathsf{R}_5 \leftrightarrow \mathsf{P}_3$ — на изоморфизм в группах примеров 6 и 10.

§ 4. ПОДГРУППЫ

Часто оказывается возможным выделить внутри данного набора из g элементов, образующих группу $\mathcal{G}$, другой набор из меньшего числа этих элементов, который тоже удовлетворяет определению группы. Тогда говорят, что эти элементы образуют подгруппу группы $\mathcal{G}$. В отобранные элементы, безусловно, должен попасть единичный, но самое главное — произведение любых двух элементов из этой совокупности обязано также быть ее элементом. В § 2 можно найти ряд групп, содержащих подгруппы: в примере 2 элементы 1 и —1, очевидно, составляют подгруппу; группа $\mathcal{R}_2$ является подгруппой группы $\mathcal{R}_3$ (на самом деле группа $\mathcal{R}_3$ содержит бесконечное множество подгрупп $\mathcal{R}_2$, определяемых выбором оси вращения); подгруппами группы $\mathcal{R}_3$ являются также все конечные группы вращения и в частности группа, рассмотренная в примере 6.

Группа D_3 в примере 6 в свою очередь содержит несколько подгрупп, как можно видеть из ее таблицы умножения. Это циклическая группа C_3, образованная элементами E, R_1 и R_2, а также три группы из двух элементов: E, R_3; E, R_4 и E, R_5. Каждая из этих трех подгрупп изоморфна группе в примере 3. Рассмотренная в примере 10 группа перестановок имеет ту же структуру,