взаимно однозначным, то группы называются гомоморфными. Таким образом, две изоморфные группы должны иметь одну и ту же таблицу умножения; возможно лишь иное расположение групповых элементов. Поскольку при изучении симметрии для нас интересны в основном алгебраические свойства групп, определяемые их таблицами умножения, понятие изоморфизма позволяет экономить время и находить полезные аналогии, выявляя изоморфизм групп.

С некоторыми случаями изоморфизма мы уже сталкивались в примерах § 2. Так, взаимно однозначное соответствие $1 \leftrightarrow \mathsf{E}$ и $-1 \leftrightarrow \mathsf{R}$ указывает на изоморфизм групп, разобранных в примерах 1 и 3, а соответствие $\mathsf{R}_1 \leftrightarrow \mathsf{P}_5$, $\mathsf{R}_2 \leftrightarrow \mathsf{P}_4$, $\mathsf{R}_3 \leftrightarrow \mathsf{P}_1$, $\mathsf{R}_4 \leftrightarrow \mathsf{P}_2$ и $\mathsf{R}_5 \leftrightarrow \mathsf{P}_3$ — на изоморфизм в группах примеров 6 и 10.

§ 4. ПОДГРУППЫ

Часто оказывается возможным выделить внутри данного набора из g элементов, образующих группу $\mathcal{G}$, другой набор из меньшего числа этих элементов, который тоже удовлетворяет определению группы. Тогда говорят, что эти элементы образуют подгруппу группы $\mathcal{G}$. В отобранные элементы, безусловно, должен попасть единичный, но самое главное — произведение любых двух элементов из этой совокупности обязано также быть ее элементом. В § 2 можно найти ряд групп, содержащих подгруппы: в примере 2 элементы 1 и —1, очевидно, составляют подгруппу; группа $\mathcal{R}_2$ является подгруппой группы $\mathcal{R}_3$ (на самом деле группа $\mathcal{R}_3$ содержит бесконечное множество подгрупп $\mathcal{R}_2$, определяемых выбором оси вращения); подгруппами группы $\mathcal{R}_3$ являются также все конечные группы вращения и в частности группа, рассмотренная в примере 6.

Группа D_3 в примере 6 в свою очередь содержит несколько подгрупп, как можно видеть из ее таблицы умножения. Это циклическая группа C_3, образованная элементами E, R_1 и R_2, а также три группы из двух элементов: E, R_3; E, R_4 и E, R_5. Каждая из этих трех подгрупп изоморфна группе в примере 3. Рассмотренная в примере 10 группа перестановок имеет ту же структуру,

что и изоморфная ей группа D_3, и, следовательно, содержит те же самые подгруппы.

Существует ряд изящных теорем, описывающих подгруппы, но мы здесь упомянем пока только одну, по которой порядок группы обязан быть кратным порядкам подгрупп. Эта теорема называется теоремой Лагранжа (задача 2.4).

С физической точки зрения подгруппы важны в теории возмущений. Часто бывает так, что на систему, симметрия которой соответствует группе $\mathcal{G}$, действует возмущение, которое не подчиняется всем симметрическим операциям группы, но сохраняет более низкую симметрию, соответствующую некой подгруппе группы $\mathcal{G}$.

§ 5. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП

Пусть группа $\mathcal{K}$ содержит две подгруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, элементы которых коммутируют, так что $\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b=\mathsf{H}_b\mathsf{G}_a$, где G_a — любой элемент подгруппы $\mathcal{G}$, а H_b — любой *элемент подгруппы* $\mathcal{H}$. *Если, кроме того, любой элемент* группы $\mathcal{K}$ может быть записан единственным образом в виде произведения $\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b$, то группу $\mathcal{K}$ называют «прямым произведением» групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, изображая это как $\mathcal{K}=\mathcal{G}\times\mathcal{H}$. Данное определение означает, что единственным общим элементом групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ является единичный элемент.

Построим прямое произведение групп C_2 и S_2, рассмотренных в примерах 3 и 4 (§ 2). Очевидно, что инверсия, означающая просто замену всякого вектора противоположным вектором, коммутирует с любыми вращениями, поскольку если $\mathsf{R}\mathbf{r}=\mathbf{r}'$, то $\mathsf{I}\mathsf{R}\mathbf{r}=\mathsf{I}\mathbf{r}'=-\mathbf{r}'$ и $\mathsf{R}\mathsf{I}\mathbf{r}=-\mathsf{R}\mathbf{r}=-\mathbf{r}'$. Совокупность элементов E, R, I, $\mathsf{R}\mathsf{I}$ образует группу, являющуюся прямым произведением $C_2\times S_2$ и обычно обозначаемую через C_{2h}. Заметим, что элемент $\mathsf{R}\mathsf{I}$ есть операция отражения в плоскости xy (обозначаемая через σ). Это становится понятным, если проследить преобразование осей координат x, y и z: инверсия I изменяет направление всех трех осей на противоположное, а при повороте R вновь меняют знак оси x и y. Таким образом, произведение $\mathsf{R}\mathsf{I}$ обращает направление лишь оси z; это и есть отражение в плоскости xy.