что и изоморфная ей группа D_3, и, следовательно, содержит те же самые подгруппы.

Существует ряд изящных теорем, описывающих подгруппы, но мы здесь упомянем пока только одну, по которой порядок группы обязан быть кратным порядкам подгрупп. Эта теорема называется теоремой Лагранжа (задача 2.4).

С физической точки зрения подгруппы важны в теории возмущений. Часто бывает так, что на систему, симметрия которой соответствует группе $\mathcal{G}$, действует возмущение, которое не подчиняется всем симметрическим операциям группы, но сохраняет более низкую симметрию, соответствующую некой подгруппе группы $\mathcal{G}$.

§ 5. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП

Пусть группа $\mathcal{K}$ содержит две подгруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, элементы которых коммутируют, так что $\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b=\mathsf{H}_b\mathsf{G}_a$, где G_a — любой элемент подгруппы $\mathcal{G}$, а H_b — любой *элемент подгруппы* $\mathcal{H}$. *Если, кроме того, любой элемент* группы $\mathcal{K}$ может быть записан единственным образом в виде произведения $\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b$, то группу $\mathcal{K}$ называют «прямым произведением» групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, изображая это как $\mathcal{K}=\mathcal{G}\times\mathcal{H}$. Данное определение означает, что единственным общим элементом групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ является единичный элемент.

Построим прямое произведение групп C_2 и S_2, рассмотренных в примерах 3 и 4 (§ 2). Очевидно, что инверсия, означающая просто замену всякого вектора противоположным вектором, коммутирует с любыми вращениями, поскольку если $\mathsf{R}\mathbf{r}=\mathbf{r}'$, то $\mathsf{I}\mathsf{R}\mathbf{r}=\mathsf{I}\mathbf{r}'=-\mathbf{r}'$ и $\mathsf{R}\mathsf{I}\mathbf{r}=-\mathsf{R}\mathbf{r}=-\mathbf{r}'$. Совокупность элементов E, R, I, $\mathsf{R}\mathsf{I}$ образует группу, являющуюся прямым произведением $C_2\times S_2$ и обычно обозначаемую через C_{2h}. Заметим, что элемент $\mathsf{R}\mathsf{I}$ есть операция отражения в плоскости xy (обозначаемая через σ). Это становится понятным, если проследить преобразование осей координат x, y и z: инверсия I изменяет направление всех трех осей на противоположное, а при повороте R вновь меняют знак оси x и y. Таким образом, произведение $\mathsf{R}\mathsf{I}$ обращает направление лишь оси z; это и есть отражение в плоскости xy.

Группа D_{3h}, с которой мы познакомились в примере 7, также является прямым произведением группы D_3 и группы, состоящей из элементов E и σ_h. Последняя группа обычно обозначается через S_1, так что имеем $D_{3h}=D_3\times S_1$.

Забегая вперед, скажем, что к группе $\mathcal{R}_3$ всевозможных вращений в трех измерениях можно добавить операцию инверсии, в результате чего образуется так называемая «полная ортогональная» группа O_3. Ее элементами являются операции $\mathsf{R}_k(a)$ и $\mathsf{IR}_k(a)$.

Представление группы в виде прямого произведения удобно тем, что при этом можно вывести ее свойства из свойств образующих групп. Полностью оценить значение данного обстоятельства мы сможем позднее, пока же заметим, что таблицу умножения прямого произведения групп можно прямо написать на основании таблиц компонент, поскольку

$$(\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b)(\mathsf{G}_c\mathsf{H}_d)=(\mathsf{G}_a\mathsf{G}_c)(\mathsf{H}_b\mathsf{H}_d).$$

В случае группы C_{2h} мы получим табл. 2.7.

Таблица 2.7

G_a \ G_b	E	R	I	σ
E	E	R	I	σ
R	R	E	σ	I
I	I	σ	E	R
σ	σ	I	R	E

§ 6. СОПРЯЖЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И КЛАССЫ

Во всех группах, кроме самых простых, число элементов весьма велико. Уже в примерах 5 и 8 (§ 2) таблицы умножения становятся громоздкими. Но исследование строения групп можно упростить, выделив внутри группы «классы» элементов со сходными свойствами.