Элемент G_a некой группы называется «сопряженным» элементу G_b, если в группе найдется элемент G_n, такой, что

$$G_a = G_n G_b G_n^{-1}. \tag{2.10}$$

Если элементы G_b и G_c оба являются сопряженными элементу G_a, то отсюда сразу следует, что элементы G_b и G_c также являются сопряженными друг другу, поскольку если

$$G_a = G_n G_b G_n^{-1} \quad \text{и} \quad G_a = G_m G_c G_m^{-1},$$

то

$$G_b = G_n^{-1} G_a G_n = G_n^{-1} G_m G_c G_m^{-1} G_n = (G_n^{-1} G_m)\, G_c\, (G_n^{-1} G_m)^{-1}.$$

Это приводит к понятию «класса», в котором все элементы сопряжены друг другу. При этом ни один элемент не может принадлежать более чем к одному классу. В самом деле, если элемент G принадлежит двум классам, то он должен быть сопряжен со всеми элементами в обоих классах, и тогда элементы одного класса будут сопряжены элементам другого, т. е. эти два класса объединяются в один. Вследствие этого всякую группу можно разбить на непересекающиеся классы, которые мы будем обозначать символами $\mathscr{C}_p$.

В абелевых группах каждый элемент группы сам по себе образует класс, поскольку из соотношения (2.10) вследствие коммутации групповых элементов вытекает равенство $G_a = G_b$. По той же причине один единичный элемент всегда образует класс.

§ 7. ПРИМЕРЫ КЛАССОВ

А. Группа вращений $\mathscr{R}_3$

Чтобы найти элементы группы, принадлежащие к тому же классу, что и некоторый выбранный поворот $R_k(a)$, необходимо построить операцию вращения

$$R R_k(a) R^{-1}$$

для произвольного R. Такое тройное произведение можно очень просто интерпретировать. Покажем, что это есть поворот на тот же угол a вокруг оси $\mathbf{k}'$, связанной с ис-

ходной осью $\mathbf{k}$ соотношением

$$\mathbf{k}' = \mathsf{R}\mathbf{k}; \tag{2.11}$$

другими словами,

$$\mathsf{R}\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\,\mathsf{R}^{-1} = \mathsf{R}_{\mathbf{k}'}(a). \tag{2.12}$$

Если представить себе, что операция R переводит все векторы из старых положений в новые (обозначенные штрихом), то результат почти очевиден. Правая часть равенства (2.12) — это поворот вокруг новой оси $\mathbf{k}$ на угол a. Операция в левой части равенства — это перевод вектора из нового положения в старое, поворот вокруг старой оси $\mathbf{k}$, а затем возвращение вектора из старого положения в новое. Для более строгого доказательства рассмотрим равенство

$$[\mathsf{R}\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\,\mathsf{R}^{-1}]\,\mathbf{k}' = \mathsf{R}\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\,\mathbf{k} = \mathsf{R}\mathbf{k} = \mathbf{k}' \tag{2.13}$$

с учетом равенства (2.11) и того обстоятельства, что поворот, ось которого совпадает с направлением вектора, оставляет этот вектор без изменения. Но, согласно формуле (2.13), левая часть равенства (2.12) оставляет на месте вектор $\mathbf{k}'$; следовательно, эта операция может быть только поворотом вокруг направления $\mathbf{k}'$. Наконец, чтобы показать, что угол поворота a не меняется, построим два единичных ортогональных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$. Из рис. 2.2 видно, что

$$\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\,\mathbf{e}_1 = \cos a\,\mathbf{e}_1 + \sin a\,\mathbf{e}_2. \tag{2.14}$$

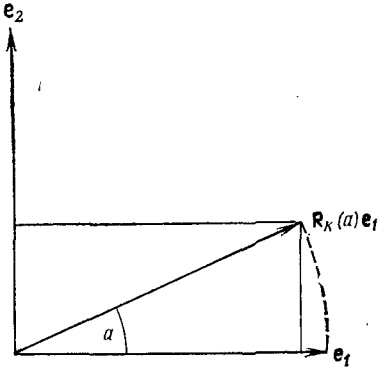

Рис. 2.2.

Поворот R в соответствии с равенством (2.11) переводит $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}'$, а $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ преобразует в два новых единичных ортогональных вектора $\mathbf{e}_1' = \mathsf{R}\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2' = \mathsf{R}\mathbf{e}_2$, лежащих в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}'$. Теперь мы имеем аналогично (2.14)

$$\mathsf{R}_{\mathbf{k}'}(a)\,\mathbf{e}_1' = \cos a\,\mathbf{e}_1' + \sin a\,\mathbf{e}_2'; \tag{2.15}$$

но, с другой стороны,

$$[\mathsf{R}\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\mathsf{R}^{-1}]\mathbf{e}_1' = \mathsf{R}\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\mathbf{e}_1 = \mathsf{R}(\cos a\,\mathbf{e}_1 + \sin a\,\mathbf{e}_2) = \\ = \cos a\,\mathbf{e}_1' + \sin a\,\mathbf{e}_2';$$

сравнивая это выражение с (2.15), мы видим, что равенство (2.12) доказано.

Итак, классы группы $\mathscr{R}_3$ очень простые. Поскольку операция вращения R, переводящая направление вектора $\mathbf{k}$ в произвольно заданное направление $\mathbf{k}'$, существует всегда, любые два поворота на одинаковый угол вне зависимости от того, вокруг каких осей они осуществляются, будут относиться к одному и тому же классу. (Разумеется, мы рассматриваем только такие повороты, оси которых проходят через фиксированное начало координат.) В то же время равенство (2.12) показывает, что два поворота на разные углы не могут принадлежать одному и тому же классу, поскольку R — произвольная операция.

Б. Конечная группа вращений D_3 (§ 2, пример 6)

Выбрав эту подгруппу группы $\mathscr{R}_3$, мы можем искать классы сопряженных элементов на основе равенства (2.12). Из него следует, что для того, чтобы два элемента группы D_3 принадлежали одному классу, они должны отвечать поворотам на одинаковый угол. Но это условие не является достаточным. В дополнение к нему элементом группы D_3 обязан быть и поворот R, переводящий $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}'$. Таким путем можно установить, что в данном случае имеется три класса:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_1 &= \mathsf{E}, \\ \mathscr{C}_2 &= \{\mathsf{R}_1,\ \mathsf{R}_2\}, \\ \mathscr{C}_3 &= \{\mathsf{R}_3,\ \mathsf{R}_4,\ \mathsf{R}_5\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Как обычно, единичная операция сама по себе образует класс. Операции R_1 и R_2 соответствуют углу поворота $2\pi/3$, а R_3, R_4 и R_5 — повороту на π (R_2 можно рассматривать либо как поворот на $4\pi/3$ вокруг положительного направления оси z, либо как поворот на $2\pi/3$ вокруг противоположного направления). Таким образом, помимо $\mathscr{C}_1$ должны существовать еще по крайней мере два класса.

Чтобы показать, что элементы R_1 и R_2 попадают в один класс, следует найти операцию вращения, переводящую ось R_1 в ось R_2. Но это просто инверсия оси z, достигаемая при операциях R_3, R_4 и R_5. Аналогично повороты R_1 и R_2 переводят друг в друга оси R_3, R_4 и R_5. Именно:

$$R_2 = R_3 R_1 R_3^{-1}, \quad R_3 = R_1 R_4 R_1^{-1} = R_2 R_5 R_2^{-1}.$$

В. Симметрическая группа $\mathscr{S}_3$ (§ 2, пример 10)

Группа $\mathscr{S}_3$ разбивается на классы аналогично группе D_3, так как эти группы изоморфны. Имеем

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_1 &= E, \\ \mathscr{C}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathscr{C}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Заметим одну общую особенность элементов группы $\mathscr{S}_3$: все они при перестановке оставляют на месте одно из чисел, тогда как два элемента группы $\mathscr{S}_2$ перемещают все три числа. Это характерно для структуры классов группы $\mathscr{S}_n$ при произвольном n, но более подробное исследование данного вопроса мы оставим до гл. 17 (т. 2).

§ 8. КЛАССЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

Классы группы прямого произведения $\mathscr{G} \times \mathscr{H}$ легко установить, зная классы групп $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$, следующим образом. Предположим, что элементы $G_a H_b$ и $G_c H_d$ принадлежат одному и тому же классу. Тогда по определению должен существовать некоторый элемент $G_e H_f$, такой, что

$$G_e H_f G_a H_b (G_e H_f)^{-1} = G_c H_d,$$

т. е.

$$(G_e G_a G_e^{-1})(H_f H_b H_f^{-1}) = G_c H_d,$$

откуда

$$G_e G_a G_e^{-1} = G_c, \quad H_f H_b H_f^{-1} = H_d.$$

Отсюда видно, что G_a и G_c принадлежат одному и тому же классу группы $\mathscr{G}$, а H_b и H_d — одному и тому же