Чтобы показать, что элементы R_1 и R_2 попадают в один класс, следует найти операцию вращения, переводящую ось R_1 в ось R_2. Но это просто инверсия оси z, достигаемая при операциях R_3, R_4 и R_5. Аналогично повороты R_1 и R_2 переводят друг в друга оси R_3, R_4 и R_5. Именно:

$$R_2 = R_3 R_1 R_3^{-1}, \quad R_3 = R_1 R_4 R_1^{-1} = R_2 R_5 R_2^{-1}.$$

В. Симметрическая группа $\mathscr{S}_3$ (§ 2, пример 10)

Группа $\mathscr{S}_3$ разбивается на классы аналогично группе D_3, так как эти группы изоморфны. Имеем

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_1 &= E, \\ \mathscr{C}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathscr{C}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Заметим одну общую особенность элементов группы $\mathscr{S}_3$: все они при перестановке оставляют на месте одно из чисел, тогда как два элемента группы $\mathscr{S}_2$ перемещают все три числа. Это характерно для структуры классов группы $\mathscr{S}_n$ при произвольном n, но более подробное исследование данного вопроса мы оставим до гл. 17 (т. 2).

§ 8. КЛАССЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

Классы группы прямого произведения $\mathscr{G} \times \mathscr{H}$ легко установить, зная классы групп $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$, следующим образом. Предположим, что элементы $G_a H_b$ и $G_c H_d$ принадлежат одному и тому же классу. Тогда по определению должен существовать некоторый элемент $G_e H_f$, такой, что

$$G_e H_f G_a H_b (G_e H_f)^{-1} = G_c H_d,$$

т. е.

$$(G_e G_a G_e^{-1})(H_f H_b H_f^{-1}) = G_c H_d,$$

откуда

$$G_e G_a G_e^{-1} = G_c, \quad H_f H_b H_f^{-1} = H_d.$$

Отсюда видно, что G_a и G_c принадлежат одному и тому же классу группы $\mathscr{G}$, а H_b и H_d — одному и тому же

классу группы $\mathcal{H}$. Таким образом, в классе группы $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ будут содержаться все произведения элементов $\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b$, где G_a пробегает целиком некоторый класс группы $\mathcal{G}$, а H_b пробегает класс группы $\mathcal{H}$. Каждой паре классов, одному из $\mathcal{G}$, а другому из $\mathcal{H}$, будут соответствовать один класс в группе $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$. ∎

Рассматривая в качестве примера полную ортогональную группу O_3, мы можем теперь видеть, что каждому углу поворота a соответствуют два класса сопряженных элементов. В один из них попадают все собственные вращения $\mathsf{R}_k(a)$, а в другой — все несобственные вращения $\mathsf{IR}_k(a)$. Каждая такая пара классов соответствует двум классам группы инверсии: E и I. Другой наш пример — группа D_{3h} — содержит шесть классов, соответствующих комбинациям трех классов группы D_3 и двух классов (E и σ_h) группы S_1.

§ 9. ТЕОРЕМА О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ГРУПП

Докажем одно простое свойство групп, называемое теоремой о перечислении, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем. Теорема утверждает, что если G_a — некоторый фиксированный элемент группы $\mathcal{G}$, а элемент G_b пробегает всю группу, то произведение $\mathsf{G}_c=\mathsf{G}_b\mathsf{G}_a$ также пробегает всю группу, причем каждый из элементов группы появляется один и только один раз. Для доказательства вначале заметим, что при любом заданном G_c из условия $\mathsf{G}_b=\mathsf{G}_c\mathsf{G}_a^{-1}$ следует равенство $\mathsf{G}_c=\mathsf{G}_b\mathsf{G}_a$ (элемент G_a^{-1} обязан существовать по определению группы). Далее можно утверждать, что два разных элемента G_b и G_b' не могут порождать один элемент G_c, ибо отсюда следовало бы равенство

$$\mathsf{G}_c=\mathsf{G}_b\mathsf{G}_a=\mathsf{G}_b'\mathsf{G}_a,$$

так что, умножив на G_a^{-1}, мы получили бы $\mathsf{G}_b=\mathsf{G}_b'$. Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

Элементарное, хотя математически более строгое, рассмотрение групп и родственных им объектов можно найти в книге

Green J. A. Sets and Groups, Routledge and Kegan Paul, London, 1965.