

классу группы  $\mathcal{H}$ . Таким образом, в классе группы  $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$  будут содержаться все произведения элементов  $G_a H_b$ , где  $G_a$  пробегает целиком некоторый класс группы  $\mathcal{G}$ , а  $H_b$  пробегает класс группы  $\mathcal{H}$ . Каждой паре классов, одному из  $\mathcal{G}$ , а другому из  $\mathcal{H}$ , будут соответствовать один класс в группе  $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ .

Рассматривая в качестве примера полную ортогональную группу  $O_3$ , мы можем теперь видеть, что каждому углу поворота  $a$  соответствуют два класса сопряженных элементов. В один из них попадают все собственные вращения  $R_k(a)$ , а в другой — все несобственные вращения  $IR_k(a)$ . Каждая такая пара классов соответствует двум классам группы инверсии:  $E$  и  $I$ . Другой наш пример — группа  $D_{3h}$  — содержит шесть классов, соответствующих комбинациям трех классов группы  $D_3$  и двух классов ( $E$  и  $\sigma_h$ ) группы  $S_1$ .

### § 9. ТЕОРЕМА О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ГРУПП

Докажем одно простое свойство групп, называемое теоремой о перечислении, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем. Теорема утверждает, что если  $G_a$  — некоторый фиксированный элемент группы  $\mathcal{G}$ , а элемент  $G_b$  пробегает всю группу, то произведение  $G_c = G_b G_a$  также пробегает всю группу, причем каждый из элементов группы появляется один и только один раз. Для доказательства вначале заметим, что при любом заданном  $G_c$  из условия  $G_b = G_c G_a^{-1}$  следует равенство  $G_c = G_b G_a$  (элемент  $G_a^{-1}$  обязан существовать по определению группы). Далее можно утверждать, что два разных элемента  $G_b$  и  $G'_b$  не могут порождать один элемент  $G_c$ , ибо отсюда следовало бы равенство

$$G_c = G_b G_a = G'_b G_a,$$

так что, умножив на  $G_a^{-1}$ , мы получили бы  $G_b = G'_b$ . Тем самым теорема доказана.

### ЛИТЕРАТУРА

Элементарное, хотя математически более строгое, рассмотрение групп и родственных им объектов можно найти в книге *Green J. A. Sets and Groups, Routledge and Kegan Paul, London, 1965.*