Если базис $\mathbf{e}_i$ ортонормированный, то возможна еще одна интерпретация матричных элементов $T_{ji}$. Вычисляя скалярное произведение $\mathbf{e}_j$ на $\mathbf{e}'_i$, получаем

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}'_j) = (\mathbf{e}_j, \mathsf{T}\mathbf{e}_i) = \sum_k T_{ki} (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_k T_{ki}\delta_{jk} = T_{ji}. \quad (3.21)$$

Таким образом, матричный элемент $T_{ji}$ — это просто скалярное произведение $(\mathbf{e}_j, \mathsf{T}\mathbf{e}_i)$, в котором оператор $\mathsf{T}$ «вложен» между двумя базисными векторами $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_i$. В квантовой механике часто встречается выражение «матричный элемент оператора», понимаемый именно как такое скалярное произведение.

## § 4. УМНОЖЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ, ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР

Произведением $\mathsf{TS}$ двух операторов $\mathsf{T}$ и $\mathsf{S}$ в векторном пространстве $L$ называется результат действия сначала оператора $\mathsf{S}$, а затем оператора $\mathsf{T}$.

Если

$$\mathsf{S}\mathbf{e}_i = \sum_j S_{ji}\mathbf{e}_j, \quad \mathsf{T}\mathbf{e}_j = \sum_k T_{kj}\mathbf{e}_k,$$

то

$$\mathsf{TS}\mathbf{e}_i = \sum_j S_{ji}\mathsf{T}\mathbf{e}_j = \sum_j \sum_k S_{ji}T_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_k \left\{\sum_j T_{kj}S_{ji}\right\} \mathbf{e}_k,$$

так что матричные элементы произведения $\mathsf{TS}$ имеют вид

$$(\mathsf{TS})_{ki} = \sum_j T_{kj}S_{ji}. \quad (3.22)$$

Отсюда понятно, что матрица произведения операторов $\mathsf{TS}$ есть обычное произведение матриц $\mathsf{T}$ и $\mathsf{S}$ в указанном порядке. Заметим, что операторы, как и матрицы, в общем случае не «коммутируют», т. е. порядок умножения влияет на результат. Разность $\mathsf{TS}-\mathsf{ST}$ двух разных произведений операторов $\mathsf{T}$ и $\mathsf{S}$ называется их коммутатором. Коммутатор, обозначаемый символом $[\mathsf{T}, \mathsf{S}]$, сам является оператором. Отметим также, что, по принятому соглашению, оператор действует на вектор, находящийся справа от него. Следовательно, можно считать, что в произведении $\mathsf{TS}$ сначала действует оператор $\mathsf{S}$, а затем оператор $\mathsf{T}$.

Пусть имеется оператор $\mathsf{T}$ в векторном пространстве $L$; мы записываем, как обычно, $\mathsf{T}\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ и называем $\mathbf{r}'$ преобразованным вектором. Тогда, вообще говоря, можно определить «обратный» оператор $\mathsf{T}^{-1}$ соотношением

$$\mathbf{r}=\mathsf{T}^{-1}\mathbf{r}'. \tag{3.23}$$

Обратный оператор $\mathsf{T}^{-1}$ имеет очевидные свойства $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{T}=\mathsf{T}\mathsf{T}^{-1}=\mathsf{E}$, где $\mathsf{E}$ — тождественный оператор, оставляющий все векторы неизменными; в любом произвольном базисе он дается единичной диагональной матрицей. Матрица $\mathsf{T}^{-1}$— это просто матрица, обратная матрице $\mathsf{T}$. Предполагается, конечно, что обратная операция существует, а это, в свою очередь, накладывает на $\mathsf{T}$ ограничения, а именно преобразование должно быть взаимнооднозначным или, если говорить о матрице $\mathsf{T}$, ее детерминант должен быть отличным от нуля. Во всех представляющих интерес задачах этой книги фигурируют взаимнооднозначные преобразования. Заметим, что оператор, обратный произведению $\mathsf{TS}$, дается выражением $(\mathsf{TS})^{-1}=\mathsf{S}^{-1}\mathsf{T}^{-1}$, в котором первоначальный порядок умножения изменяется на противоположный. Это утверждение, хорошо известное из теории матриц, легко проверить: обратный оператор по определению удовлетворяет тождеству $\mathsf{T}(\mathsf{S})^{-1}\mathsf{TS}=\mathsf{E}$, и, умножив правую и левую части справа на $\mathsf{S}^{-1}$, получим $(\mathsf{TS})^{-1}\mathsf{T}=\mathsf{S}^{-1}$, а умножив еще раз справа на $\mathsf{T}^{-1}$, получим требуемый результат $(\mathsf{TS})^{-1}=\mathsf{S}^{-1}\mathsf{T}^{-1}$. Этот результат очевиден, если рассматривать операции надевания носков и ботинок. При операции обувания мы сначала надеваем носки, а затем ботинки, а при операции разувания ботинки снимают вначале, а носки потом.

Пусть оператор $\mathsf{T}$ переводит $\mathbf{r}$ в $\mathbf{r}'$, а $\tilde{\mathbf{r}}$ — в $\tilde{\mathbf{r}}'$, т. е. $\mathsf{T}\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ и $\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}}=\tilde{\mathbf{r}}'$. Если при этом имеется другой оператор $\mathsf{S}$, переводящий $\mathbf{r}$ в $\tilde{\mathbf{r}}$, т. е. $\mathsf{S}\mathbf{r}=\tilde{\mathbf{r}}$, мы вправе заинтересоваться: а какой вид имеет оператор $\mathsf{S}'$, переводящий $\mathbf{r}'$ в $\tilde{\mathbf{r}}'$, т. е. $\mathsf{S}'\mathbf{r}'=\tilde{\mathbf{r}}'$. Если векторы $\mathbf{r}'$ и $\tilde{\mathbf{r}}'$ мы называли преобразованными (т. е. трансформированными оператором $\mathsf{T}$), то оператор $\mathsf{S}'$ можно назвать трансформированным оператором. Чтобы выразить $\mathsf{S}'$ через исходные операторы, заметим, что $\tilde{\mathbf{r}}'=\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}}=\mathsf{TS}\mathbf{r}=\mathsf{TST}^{-1}\mathbf{r}'$; таким

образом,

$$S' = TST^{-1}. \tag{3.24}$$

Понятие трансформированного оператора становится более ясным на примерах § 8, а наглядно оно поясняется на рис. 3.1. Здесь точками представлены векторы, а прямыми со стрелкой — операторы. Расстояния и углы не несут здесь никакой информации. Таким образом, уравнение $Sr = \tilde{r}$ представлено прямой, обозначенной буквой $S$ и направленной от $r$ к $\tilde{r}$. Искомый трансформированный оператор, переводящий $r'$ в $\tilde{r}'$, изображен пунктиром; но такое же перемещение можно совершить и по другому пути, пройдя три остальные стороны четырехугольника. Это будет движение сначала против направления $T$, соответствующее обратному оператору $T^{-1}$, затем движению по $S$ и, наконец, по $T$. В результате мы вновь получаем $S' = TST^{-1}$.

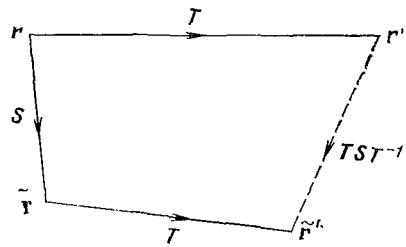

Рис. 3.1.

В более общем случае оператор $T$ может переводить вектор из пространства $L$ в другое пространство $L'$, так что векторы $r'$, $\tilde{r}'$ и оператор $S'$ принадлежат пространству $L'$.

В примере с обуванием и разуванием мы можем рассматривать $T$ как операцию надевания носка, а $S$ — как операцию его заштопывания. Если носок уже на ноге, то штопка становится более сложной процедурой $TST^{-1}$, т. е. прежде всего требуется снять носок ($T^{-1}$), затем его заштопать ($S$) и наконец надеть снова ($T$).

## § 5. СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР, УНИТАРНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Оператор, *сопряженный* оператору $T$ и обозначаемый через $T^\dagger$, по определению удовлетворяет уравнению

$$(r, T^\dagger s) = (Tr, s) \tag{3.25}$$