

образом,

$$S' = TST^{-1}. \quad (3.24)$$

Понятие трансформированного оператора становится более ясным на примерах § 8, а наглядно оно поясняется на рис. 3.1. Здесь точками представлены векторы, а прямыми со стрелкой — операторы. Расстояния и углы не несут здесь никакой информации. Таким образом, уравнение $Sr = \tilde{r}$ представлено прямой, обозначенной буквой S и направленной от r к \tilde{r} . Искомый трансформированный оператор, переводящий r' в \tilde{r}' , изображен пунктиром; но такое же перемещение можно совершить и по другому пути, пройдя три остальные стороны четырехугольника. Это будет движение сначала против направления T , соответствующее обратному оператору T^{-1} , затем движению по S и, наконец, по T . В результате мы вновь получаем $S' = TST^{-1}$.

В более общем случае оператор T может переводить вектор из пространства L в другое пространство L' , так что векторы r' , \tilde{r}' и оператор S' принадлежат пространству L' .

В примере с обуванием и разуванием мы можем рассматривать T как операцию надевания носка, а S — как операцию его заштопывания. Если носок уже на ноге, то штопка становится более сложной процедурой TST^{-1} , т. е. прежде всего требуется снять носок (T^{-1}), затем его заштопать (S) и наконец надеть снова (T).

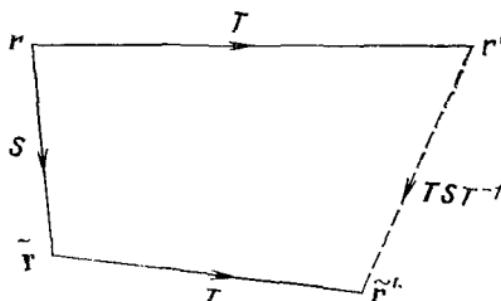


Рис. 3.1.

§ 5. СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР, УНИТАРНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Оператор, *сопряженный* оператору T и обозначаемый через T^\dagger , по определению удовлетворяет уравнению

$$(r, T^\dagger s) = (Tr, s) \quad (3.25)$$

для любых векторов \mathbf{r} и \mathbf{s} в пространстве L . В частности, выбирая $\mathbf{r} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{s} = \mathbf{e}_j$ и используя уравнение (3.20), получим, что в ортонормированном базисе матрицы \mathbf{T}^\dagger и \mathbf{T} связаны соотношением

$$(\mathbf{T}^\dagger)_{ij} = (T_{ji})^*. \quad (3.26)$$

Унитарный оператор проще всего определить так: оператор \mathbf{T} является унитарным, если удовлетворяет условию

$$\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} = \mathbf{E} \quad (3.27)$$

или, другими словами, если

$$\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T}^{-1}. \quad (3.28)$$

Такое условие важно тем, что при этом скалярное произведение сохраняется, т. е. если мы возьмем $\mathbf{r}' = \mathbf{T}\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}' = \mathbf{T}\mathbf{s}$, то

$$(\mathbf{r}', \mathbf{s}') = (\mathbf{T}\mathbf{r}, \mathbf{T}\mathbf{s}) = (\mathbf{r}, \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}\mathbf{s}) = (\mathbf{r}, \mathbf{s}). \quad (3.29)$$

Это означает, что если векторы \mathbf{e}_i образуют ортонормированный базис, а $\mathbf{e}'_i = \mathbf{T}\mathbf{e}_i$, то векторы \mathbf{e}'_i образуют новый ортонормированный базис. Таким образом, унитарный оператор есть оператор перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Элементы унитарной матрицы, очевидно, связаны между собой соотношением (3.28). Подробнее это записывается так:

$$\sum_{j=1}^s T_{ji}^* T_{jk} = \delta_{ik}, \quad (3.30a)$$

$$\sum_{j=1}^s T_{ij} T_{kj}^* = \delta_{ik}, \quad (3.30b)$$

хотя (3.30б) есть следствие равенства (3.30а). Если матрица \mathbf{T} действительная, то \mathbf{T}^\dagger будет транспонированной матрицей и звездочки в этих двух формулах не нужны. Унитарная действительная матрица называется «ортогональной».

Эрмитовым или самосопряженным называют оператор, равный своему сопряженному. Таким образом, оператор \mathbf{H} эрмитов, если

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}, \quad (3.31)$$

откуда следует равенство

$$(\mathbf{H}\mathbf{r}, \mathbf{s}) = (\mathbf{r}, \mathbf{H}\mathbf{s}) \quad (3.32)$$

при любых \mathbf{r} и \mathbf{s} .

В заключение подчеркнем, что понятия унитарных и эрмитовых операторов имеют смысл только тогда, когда полностью определены векторное пространство и скалярное произведение.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Если в векторном пространстве L задан оператор T , то можно поставить вопрос: существуют ли в пространстве L векторы \mathbf{r} , обладающие весьма специальными свойствами, а именно такие, что трансформированный вектор $T\mathbf{r}$ будет равен просто вектору \mathbf{r} , умноженному на константу? Другими словами, можем ли мы по заданному оператору T найти векторы \mathbf{r} , удовлетворяющие соотношению

$$T\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \quad (3.33)$$

при некоторых λ ? Для решения этой задачи лучше всего написать выражение для вектора \mathbf{r} в некотором базисе \mathbf{e}_i ; тогда с учетом формулы (3.19) получим

$$\sum_{j=1}^s T_{ij} r_j = \lambda r_i,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^s (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) r_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (3.34)$$

где r_j — компоненты вектора \mathbf{r} . Система s линейных однородных уравнений с s неизвестными [формула (3.34)] совместна, если детерминант ее коэффициентов равен нулю. Это дает нам полиномиальное уравнение s -й степени по λ , s корней которого λ называют собственными значениями оператора T . Каждому корню λ_i соответствует решение $\mathbf{r} = \xi^i$, называемое собственным вектором оператора T . Система (3.33) однородна, а потому мы вправе еще и нормировать ξ^i произвольным образом. Далее, если оператор T эрмитов, то его собственные векторы взаимно ортогональны или могут быть ортогонализованы. Таким образом, из собственных векторов эрмитова