откуда следует равенство

$$(\mathsf{H}\mathbf{r}, \mathbf{s}) = (\mathbf{r}, \mathsf{H}\mathbf{s}) \tag{3.32}$$

при любых $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$.

В заключение подчеркнем, что понятия унитарных и эрмитовых операторов имеют смысл только тогда, когда полностью определены векторное пространство и скалярное произведение.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Если в векторном пространстве L задан оператор T, то можно поставить вопрос: существуют ли в пространстве L векторы $\mathbf{r}$, обладающие весьма специальными свойствами, а именно такие, что трансформированный вектор $\mathsf{T}\mathbf{r}$ будет равен просто вектору $\mathbf{r}$, умноженному на константу? Другими словами, можем ли мы по заданному оператору T найти векторы $\mathbf{r}$, удовлетворяющие соотношению

$$\mathsf{T}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \tag{3.33}$$

при некоторых λ? Для решения этой задачи лучше всего написать выражение для вектора $\mathbf{r}$ в некотором базисе $\mathbf{e}_i$; тогда с учетом формулы (3.19) получим

$$\sum_{j=1}^{s} T_{ij} r_j = \lambda r_i,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^{s} (T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) r_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{3.34}$$

где r_j — компоненты вектора $\mathbf{r}$. Система s линейных однородных уравнений с s неизвестными [формула (3.34)] совместна, если детерминант ее коэффициентов равен нулю. Это дает нам полиномиальное уравнение s-й степени по λ, s корней которого λ называют собственными значениями оператора T. Каждому корню λ_i соответствует решение $\mathbf{r} = \xi^i$, называемое собственным вектором оператора T. Система (3.33) однородна, а потому мы вправе еще и нормировать ξ^i произвольным образом. Далее, если оператор T эрмитов, то его собственные векторы взаимно ортогональны или могут быть ортогонализованы. Таким образом, из собственных векторов эрмитова

оператора можно составить ортонормированный базис в пространстве L. Ортогональность доказывается просто: из равенств

$$\mathsf{T}\xi^i = \lambda_i \xi^i,$$
$$\mathsf{T}\xi^j = \lambda_j \xi^j$$

вытекает равенство $(\xi^j, \mathsf{T}\xi^i) - (\xi^i, \mathsf{T}\xi^j)^* = \lambda_i(\xi^j, \xi^i) - \lambda_j^*(\xi^i, \xi^j)^*$, а потому $(\xi^j, \mathsf{T}\xi^i) - (\mathsf{T}\xi^j, \xi^i) = (\lambda_i - \lambda_j^*)(\xi^j, \xi^i)$ и, следовательно,

$$(\lambda_i - \lambda_j^*)(\xi^j, \xi^i) = (\xi^j, \mathsf{T}\xi^i) - (\xi^j, \mathsf{T}\xi^i) = 0 \qquad (3.35)$$

с учетом свойства (3.32) эрмитова оператора T. Положив в этой формуле $i=j$, мы получим $\lambda_i - \lambda_i^* = 0$. Итак, все собственные значения оператора T действительны. Далее, при $i \neq j$, полагая $\lambda_i \neq \lambda_j$, получаем соотношение ортогональности

$$(\xi^j, \xi^i) = 0,$$

а после нормировки ξ^i для собственных векторов эрмитова оператора имеем

$$(\xi^i, \xi^j) = \delta_{ij}. \qquad (3.36)$$

Эту формулу можно вывести даже при $\lambda_i = \lambda_j$. Действительно, хотя приведенное выше доказательство ортогональности в этом случае не верно, рассмотренная в § 1 ортогонализация по Шмидту позволяет построить ортонормированный базис внутри совокупности вырожденных собственных векторов (т. е. собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению). Здесь существенным оказывается то обстоятельство, что всякая линейная комбинация вырожденных собственных векторов сама есть собственный вектор.

§ 7. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

В § 2, п. В и Г было показано, как из некой совокупности функций при подходящем выборе скалярного произведения образуется векторное пространство. Один из важных способов построения оператора в пространстве функций — задание преобразования функций, «индуцированного» преобразованием аргументов этих функций. Обозначим координаты некой системы s-мерным вектором