оператора можно составить ортонормированный базис в пространстве L. Ортогональность доказывается просто: из равенств

$$\mathsf{T}\xi^i = \lambda_i \xi^i,$$
$$\mathsf{T}\xi^j = \lambda_j \xi^j$$

вытекает равенство $(\xi^j, \mathsf{T}\xi^i) - (\xi^i, \mathsf{T}\xi^j)^* = \lambda_i (\xi^j, \xi^i) - \lambda_j^* (\xi^i, \xi^j)^*$, а потому $(\xi^j, \mathsf{T}\xi^i) - (\mathsf{T}\xi^j, \xi^i) = (\lambda_i - \lambda_j^*)(\xi^j, \xi^i)$ и, следовательно,

$$(\lambda_i - \lambda_j^*)(\xi^j, \xi^i) = (\xi^j, \mathsf{T}\xi^i) - (\xi^j, \mathsf{T}\xi^i) = 0 \quad (3.35)$$

с учетом свойства (3.32) эрмитова оператора T. Положив в этой формуле $i=j$, мы получим $\lambda_i - \lambda_i^* = 0$. Итак, все собственные значения оператора T действительны. Далее, при $i \neq j$, полагая $\lambda_i \neq \lambda_j$, получаем соотношение ортогональности

$$(\xi^j, \xi^i) = 0,$$

а после нормировки ξ^i для собственных векторов эрмитова оператора имеем

$$(\xi^i, \xi^j) = \delta_{ij}. \quad (3.36)$$

Эту формулу можно вывести даже при $\lambda_i = \lambda_j$. Действительно, хотя приведенное выше доказательство ортогональности в этом случае не верно, рассмотренная в § 1 ортогонализация по Шмидту позволяет построить ортонормированный базис внутри совокупности вырожденных собственных векторов (т. е. собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению). Здесь существенным оказывается то обстоятельство, что всякая линейная комбинация вырожденных собственных векторов сама есть собственный вектор.

§ 7. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

В § 2, п. В и Г было показано, как из некой совокупности функций при подходящем выборе скалярного произведения образуется векторное пространство. Один из важных способов построения оператора в пространстве функций — задание преобразования функций, «индуцированного» преобразованием аргументов этих функций. Обозначим координаты некой системы s-мерным вектором

$\mathbf{r}=(r_1, r_2, \ldots, r_s)$ и рассмотрим некоторую группу преобразований G системы и, стало быть, также вектора $\mathbf{r}$. Итак, мы рассматриваем преобразования, индуцированные в векторном пространстве функций $\psi(\mathbf{r})$ этими преобразованиями G, примененными к вектору $\mathbf{r}$. Такое индуцированное преобразование мы будем обозначать символом $T(G)$ и определять из уравнения

$$T(G)\,\psi(\mathbf{r}) = \psi(G^{-1}\mathbf{r}). \tag{3.37}$$

Для трансформированных функций $T(G)\psi(\mathbf{r})$ будем использовать обозначение $\psi'(\mathbf{r})$. Важно четко понимать, что мы имеем дело с двумя векторными пространствами: пространством координат вектора $\mathbf{r}$, в котором определено преобразование G, и пространством функций $\psi(\mathbf{r})$, в котором определено индуцированное преобразование $T(G)$. Через компоненты вектора $\mathbf{r}$ в некотором базисе $\mathbf{e}_i$ преобразование (3.37) можно выразить таким образом:

$$T(G)\,\psi(r_1, r_2, \ldots, r_s) = \psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_s), \tag{3.38}$$

где $\bar{r}_i$ — i-я компонента вектора $\bar{\mathbf{r}}=G^{-1}\mathbf{r}$. Если известна матрица преобразования G в базисе $\mathbf{e}_i$, то для унитарного оператора G по формуле (3.20)

$$\bar{r}_j = \sum_i (G^{-1})_{ji}\, r_i = \sum_i G^*_{ij} r_i. \tag{3.39}$$

Числа $\bar{r}_j$ можно рассматривать как компоненты вектора $\mathbf{r}$ в трансформированном базисе $\mathbf{e}'_i=G\mathbf{e}_i$, поскольку

$$(\mathbf{e}'_i, \mathbf{r}) = (G\mathbf{e}_i, \mathbf{r}) = (\mathbf{e}_i, G^{-1}\mathbf{r}) = \bar{r}_i. \tag{3.40}$$

Чтобы, зная функцию $\psi(\mathbf{r})$ и матрицу преобразования G, найти $\psi'(r)$, нужно просто подставить (3.39) в (3.38).

Может показаться непонятным, зачем нужен в определении (3.37) обратный оператор G^{-1}, раз мы с тем же успехом можем использовать и G. Тем не менее, согласившись применять G^{-1}, мы в дальнейшем получим важные упрощения; такое условие имеет и некоторый физический смысл. Предположим, например, что $\psi(\mathbf{r})$ описывает температуру тела в точке $\mathbf{r}$ трехмерного пространства, а G есть поворот тела относительно начала координат. Тогда по определению (3.37) новая функция $\psi'(\mathbf{r})$ будет описывать температуру в точке $\mathbf{r}$ после поворота. Это

можно видеть на рис. 3.2, где буквой Q обозначена точка $\mathsf{G}^{-1}\mathbf{r}$. Таким образом, в результате поворота G точка Q переносится в точку P, ибо $\mathsf{G}(\mathsf{G}^{-1}\mathbf{r})=\mathbf{r}$. Значит, температура в P после поворота, задаваемая функцией $\psi'(\mathbf{r})$,— это та температура, которая была до поворота в точке Q, т. е. $\psi(\mathsf{G}^{-1}\mathbf{r})$. Следовательно, мы получили $\psi'(\mathbf{r})=\psi(\mathsf{G}^{-1}\mathbf{r})$,

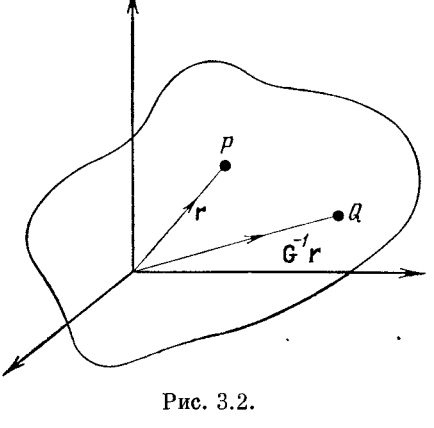

Рис. 3.2.

так что преобразование $\psi(\mathbf{r})$ в $\psi'(\mathbf{r})$ задает оператор $\mathsf{T}(\mathsf{G})$ в пространстве функций. В этой книге мы значительно чаще будем иметь дело не с температурами, а с волновыми функциями, но рассуждения от этого не изменятся; кроме того, температуру тела проще себе представить, чем значение волновой функции в точке.

Математически необходимость использования в равенстве (3.37) именно обратной операции G^{-1} становится понятной при рассмотрении последовательности двух операций. Пусть функция ψ' определяется преобразованием $\mathsf{T}(\mathsf{G}_2)$, заданным, как в (3.37), соотношением $\mathsf{T}(\mathsf{G}_2)\psi(\mathbf{r})=\psi(\mathsf{G}_2^{-1}\mathbf{r})=\psi'(\mathbf{r})$. Тогда получим

$$\mathsf{T}(\mathsf{G}_1)\,\mathsf{T}(\mathsf{G}_2)\,\psi(\mathbf{r})=\mathsf{T}(\mathsf{G}_1)\,\psi(\mathsf{G}_2^{-1}\mathbf{r})=\mathsf{T}(\mathsf{G}_1)\,\psi'(\mathbf{r})=\psi'(\mathsf{G}_1^{-1}\mathbf{r})=$$
$$=\psi(\mathsf{G}_2^{-1}\mathsf{G}_1^{-1}\mathbf{r})=\psi((\mathsf{G}_1\mathsf{G}_2)^{-1}\mathbf{r}), \quad (3.41)$$

а это означает, что произведение $\mathsf{G}_1\mathsf{G}_2$ преобразований векторов $\mathbf{r}$ индуцирует в пространстве функций произведение операторов $\mathsf{T}(\mathsf{G}_1)\mathsf{T}(\mathsf{G}_2)$, взятых в той же последовательности. Если использовать в определении (3.37)

не G^{-1}, а G, то мы получили бы, что оператору G_1G_2 соответствует оператор $T(G_2)T(G_1)$ с запутывающей перестановкой операций.

Важный частный случай преобразования функций (3.37) мы получим, если сами компоненты рассматривать как функции вектора $\mathbf{r}$, записывая $r_i=(\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$. По (3.37) компонента r_i преобразуется в

$$T(G)\,r_i=(\mathbf{e}_i,\ G^{-1}\mathbf{r})=\bar{r}_i, \tag{3.42}$$

т. е. в i-ю компоненту вектора $G^{-1}\mathbf{r}$.

Во всех предыдущих рассуждениях мы рассматривали только скалярные функции положения, которые ставят каждому вектору $\mathbf{r}$ в соответствие число $\psi(\mathbf{r})$. Обобщение на функции с несколькими компонентами, ставящие в соответствие каждому $\mathbf{r}$ несколько чисел, будет проведено в гл. 8.

§ 8. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Вращение векторов в плоскости xy

Рассмотрим поворот всевозможных векторов в плоскости xy относительно оси z на угол a. Соответствующий оператор, обозначаемый через $R(a)$, есть линейный оператор в двумерном пространстве плоскости xy. Он, очевидно, соответствует определениям (3.16). Матрицу легко найти из уравнений (3.21) и (3.14):

$$R_{ji}(a)=\mathbf{e}_j\cdot R(a)\,\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i',$$

откуда $R_{11}=\cos a$, $R_{12}=-\sin a$, $R_{21}=\sin a$, $R_{22}=\cos a$, так что

$$R=\begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix}.$$

При повороте расстояния и углы сохраняются, а потому скалярное произведение, очевидно, остается неизменным. Поэтому матрица R является ортогональной и удовлетворяет условию (3.30).

Б. Перестановки

Перестановку часто можно рассматривать как линейный оператор. Пусть перестановка P_{12} меняет местами векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в двумерном пространстве. Тогда матрица