не G^{-1}, а G, то мы получили бы, что оператору G_1G_2 соответствует оператор $T(G_2)T(G_1)$ с запутывающей перестановкой операций.

Важный частный случай преобразования функций (3.37) мы получим, если сами компоненты рассматривать как функции вектора $\mathbf{r}$, записывая $r_i=(\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$. По (3.37) компонента r_i преобразуется в

$$T(G)\, r_i = (\mathbf{e}_i,\ G^{-1}\mathbf{r}) = \bar{r}_i, \tag{3.42}$$

т. е. в i-ю компоненту вектора $G^{-1}\mathbf{r}$.

Во всех предыдущих рассуждениях мы рассматривали только скалярные функции положения, которые ставят каждому вектору $\mathbf{r}$ в соответствие число $\psi(\mathbf{r})$. Обобщение на функции с несколькими компонентами, ставящие в соответствие каждому $\mathbf{r}$ несколько чисел, будет проведено в гл. 8.

§ 8. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Вращение векторов в плоскости xy

Рассмотрим поворот всевозможных векторов в плоскости xy относительно оси z на угол a. Соответствующий оператор, обозначаемый через $R(a)$, есть линейный оператор в двумерном пространстве плоскости xy. Он, очевидно, соответствует определениям (3.16). Матрицу легко найти из уравнений (3.21) и (3.14):

$$R_{ji}(a) = \mathbf{e}_j \cdot R(a)\, \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i',$$

откуда $R_{11}=\cos a$, $R_{12}=-\sin a$, $R_{21}=\sin a$, $R_{22}=\cos a$, так что

$$R = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

При повороте расстояния и углы сохраняются, а потому скалярное произведение, очевидно, остается неизменным. Поэтому матрица R является ортогональной и удовлетворяет условию (3.30).

Б. Перестановки

Перестановку часто можно рассматривать как линейный оператор. Пусть перестановка P_{12} меняет местами векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в двумерном пространстве. Тогда матрица

P_{12} равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяет условию (3.16). Примером перемножения операторов может служить произведение $(\mathsf{P}_{12})^2=\mathsf{E}$; это равенство можно получить, перемножив матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathsf{E}.$$

На этом примере можно пояснить и задачу на собственные значения. Из вида матрицы следует, что собственные значения λ оператора P_{12} должны удовлетворять соотношению

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0,$$

откуда $\lambda=\pm 1$ и собственные векторы равны $(1/2)^{1/2}(\mathbf{e}_1\pm\mathbf{e}_2)$. Геометрически оператор P_{12} эквивалентен отражению относительно биссектрисы прямого угла. Очевидно, что оператор P_{12} оставляет на месте вектор $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$, а направление вектора $(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$ изменяет на противоположное в соответствии с собственным значением -1.

В. Умножение на функцию в функциональном пространстве

В примере § 2, п. Д векторное пространство состояло из всех функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям и обладающим конечной нормой. Результатом умножения некоторой такой функции $\psi(\mathbf{r})$ на непрерывную функцию $S(\mathbf{r})$ является другая функция $\varphi(\mathbf{r})$ в том же пространстве, равная

$$\varphi(\mathbf{r})=S(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r}). \tag{3.43}$$

В этом смысле множитель $S(\mathbf{r})$ можно рассматривать как линейный оператор в пространстве. Но здесь нужна осторожность — так, например, в конечномерном пространстве квадратичных функций (§ 2, п. Г) результат умножения на любую функцию $S(\mathbf{r})$, кроме константы, не будет квадратичной функцией, и, следовательно, в данном пространстве такой множитель *не является* оператором.

Как и в преобразовании функционального пространства (3.37), трансформированный оператор (3.24) в обозначениях (3.38) имеет вид $S'(\mathbf{r})=S(\mathsf{G}^{-1}\mathbf{r})=S(\bar{\mathbf{r}})$.

Г. Дифференцирование в пространстве функций

Если задана функция $\psi(\mathbf{r})\equiv\psi(x, y, z)$, то путем ее дифференцирования можно получить новую функцию $\varphi(x, y, z)=(\partial/\partial x)\psi(x, y, z)$. В этом смысле $\partial/\partial x$ есть линейный оператор в пространстве функций; конечно, предполагается, что функция $\varphi(x, y, z)$ принадлежит данному пространству. В примере 2, п. В множитель $\partial/\partial x$ не является оператором в пространстве квадратичных функций, но $y(\partial/\partial x)$ в этом пространстве, очевидно, является оператором. Заметим, что операторы умножения на функцию (§ 8, п. В) должны коммутировать друг с другом, ибо очевидно, что $S_1(\mathbf{r})S_2(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})=S_2(\mathbf{r})S_1(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$. Но при введении дифференцирования это, вообще говоря, становится неверным; например, взяв $\psi(\mathbf{r})=xy$, $S(\mathbf{r})=x$, получим

$$S(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})=x^2y, \quad \frac{\partial}{\partial x}S(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})=2xy,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r})=y, \quad S(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r})=xy. \tag{3.44}$$

В общем случае (§ 4) коммутатор двух операторов отличен от нуля. В данном примере коммутатор вычисляется непосредственно, поскольку для любой функции $\psi(\mathbf{r})$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x},\ S(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r})=\frac{\partial}{\partial x}S(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})-S(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r})=\frac{\partial S(\mathbf{r})}{\partial x}\psi(\mathbf{r}),$$

и поэтому можно написать

$$\left[\frac{\partial}{\partial x},\ S(\mathbf{r})\right]=\frac{\partial S(\mathbf{r})}{\partial x}, \tag{3.45}$$

где производная $\partial S/\partial x$ сама является оператором в смысле примера § 8, п. В, т. е. функцией, на которую следует умножить. Это справедливо при любой функции $S(\mathbf{r})$; в разобранном выше частном случае $\partial S/\partial x=1$, что согласуется с формулой (3.44).

Д. Индуцированное преобразование функций

В качестве иллюстрации к общим рассуждениям, изложенным в § 7, рассмотрим функцию $\psi(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — вектор в двух измерениях. Тогда, вводя полярные координаты r, φ, получим $\psi(\mathbf{r})=\psi(r, \varphi)$. По определению (3.37) преобразование функции ψ, индуцированное поворотом $\mathsf{R}(a)$, имеет вид

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}(a))\psi(\mathbf{r})=\psi(\mathsf{R}^{-1}(a)\mathbf{r})=\psi(r, \psi-a),$$

т. е.

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}(a))\psi(r, \varphi)=\psi(r, \varphi-a).$$

Для примера рассмотрим две функции:

$$\psi_1(r, \varphi)=\cos\varphi, \quad \psi_2(r, \varphi)=\sin\varphi,$$

которые дадут

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}(a))\psi_1(r, \varphi)=\cos(\varphi-a)=\cos\varphi\cos a+\sin\varphi\sin a,$$
$$\mathsf{T}(\mathsf{R}(a))\psi_2(r, \varphi)=\sin(\varphi-a)=\sin\varphi\cos a-\cos\varphi\sin a.$$

Итак,

$$\mathsf{T}\psi_1=\cos a\psi_1+\sin a\psi_2,$$
$$\mathsf{T}\psi_2=-\sin a\psi_1+\cos a\psi_2,$$

т. е. мы получили преобразование функций ψ_1 и ψ_2, индуцированное преобразованием $\mathsf{R}(a)$. Понятно, что можно построить и более сложные функции. Снова, если мы возьмем

$$\psi(r, \varphi)=\exp(im\varphi),$$

то

$$\mathsf{T}\psi=\exp[im(\varphi-a)]=\exp(-ima)\psi,$$

т. е. данная функция есть на самом деле собственная функция оператора T с собственным значением $\exp(-ima)$. Заметим, что интересующие нас в этом случае функции будут периодическими функциями угла φ с периодом 2π, поскольку при прибавлении к φ величины 2π получаем тот же самый вектор $\mathbf{r}$. Функции типа $\exp(im\varphi)$ будут иметь это свойство, если только m — целое число (положительное или отрицательное). Даже при данном ограничении оператор T все еще имеет бесконечное множество собственных значений, в чем отражается бесконечная размерность функционального пространства. ∎

Е. Еще один пример индуцированного преобразования функций

В качестве еще одной иллюстрации преобразования, индуцированного в функциональном пространстве, рассмотрим квадратичные функции из § 2, п. Г с операцией поворота R на угол $2\pi/3$ вокруг оси z. В случае функции $\psi_1=x^2$ из формулы (3.38) получим

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}_1)\,\psi_1=\bar{x}^2,$$

где в силу формулы (3.39) и сказанного в § 8, п. А имеем $\bar{x}=x\cos 2\pi/3+y\sin 2\pi/3=(-{}^1/_2)x+({}^3/_4)^{1/2}y$. В результате получаем $\mathsf{T}(\mathsf{R}_1)\psi_1=({}^1/_4)x^2-({}^3/_4)^{1/2}xy+({}^3/_4)y^2=({}^1/_4)\psi_1-({}^3/_4)^{1/2}\psi_6+({}^3/_4)\psi_2$, и, таким образом, ψ_1 преобразуется в линейную комбинацию шести функций ψ_i.

Ж. Трансформированный оператор

В § 4 мы определили трансформированный оператор $\mathsf{S}'=\mathsf{TST}^{-1}$, представляемый той же матрицей в трансформированном базисе $\mathbf{e}_i'=\mathsf{T}\mathbf{e}_i$, что и оператор S в первоначальном базисе $\mathbf{e}_i$. Выберем в качестве примера оператор S типа обсуждавшихся в § 8, п. В, а также функциональное пространство и преобразование T, разобранные в том же пункте. В частности, пусть оператор S есть оператор умножения на функцию $\sin 3\varphi$, вектор ψ равен $\cos\varphi$ и преобразование $\mathsf{T}=\mathsf{T}(\mathsf{R}(a))$, так что $\mathsf{T}\psi=\cos(\varphi-a)$. Таким образом, напишем

$$\psi'=\mathsf{T}\psi=\cos(\varphi-a),$$
$$\tilde{\psi}=\mathsf{S}\psi=\sin 3\varphi\cos\varphi,$$
$$\tilde{\psi}'=\mathsf{T}\tilde{\psi}=\sin 3(\varphi-a)\cos(\varphi-a),$$

так что трансформированный оператор S', определяемый соотношением $\mathsf{S}'\psi'=\tilde{\psi}'$, в данном случае есть просто оператор умножения на функцию $\sin 3(\varphi-a)$.

ЛИТЕРАТУРА

Подробнее относительно линейной алгебры см.
Birkhoff G., Maclane S., A Survey of Modern Algebra, Macmillan, London, 1965.