### Е. Еще один пример индуцированного преобразования функций

В качестве еще одной иллюстрации преобразования, индуцированного в функциональном пространстве, рассмотрим квадратичные функции из § 2, п. Г с операцией поворота R на угол $2\pi/3$ вокруг оси $z$. В случае функции $\psi_1=x^2$ из формулы (3.38) получим

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}_1)\,\psi_1=\bar{x}^2,$$

где в силу формулы (3.39) и сказанного в § 8, п. А имеем $\bar{x}=x\cos 2\pi/3+y\sin 2\pi/3=(-{}^1/_2)x+({}^3/_4)^{1/2}y$. В результате получаем $\mathsf{T}(\mathsf{R}_1)\psi_1=({}^1/_4)x^2-({}^3/_4)^{1/2}xy+({}^3/_4)y^2=({}^1/_4)\psi_1-({}^3/_4)^{1/2}\psi_6+({}^3/_4)\psi_2$, и, таким образом, $\psi_1$ преобразуется в линейную комбинацию шести функций $\psi_i$.

### Ж. Трансформированный оператор

В § 4 мы определили трансформированный оператор $\mathsf{S}'=\mathsf{TST}^{-1}$, представляемый той же матрицей в трансформированном базисе $\mathbf{e}_i'=\mathsf{T}\mathbf{e}_i$, что и оператор S в первоначальном базисе $\mathbf{e}_i$. Выберем в качестве примера оператор S типа обсуждавшихся в § 8, п. В, а также функциональное пространство и преобразование T, разобранные в том же пункте. В частности, пусть оператор S есть оператор умножения на функцию $\sin 3\varphi$, вектор $\psi$ равен $\cos\varphi$ и преобразование $\mathsf{T}=\mathsf{T}(\mathsf{R}(a))$, так что $\mathsf{T}\psi=\cos(\varphi-a)$. Таким образом, напишем

$$\psi'=\mathsf{T}\psi=\cos(\varphi-a),$$
$$\tilde{\psi}=\mathsf{S}\psi=\sin 3\varphi\cos\varphi,$$
$$\tilde{\psi}'=\mathsf{T}\tilde{\psi}=\sin 3(\varphi-a)\cos(\varphi-a),$$

так что трансформированный оператор $\mathsf{S}'$, определяемый соотношением $\mathsf{S}'\psi'=\tilde{\psi}'$, в данном случае есть просто оператор умножения на функцию $\sin 3(\varphi-a)$.

### ЛИТЕРАТУРА

Подробнее относительно линейной алгебры см.
*Birkhoff G., Maclane S.*, A Survey of Modern Algebra, Macmillan, London, 1965.

## ЗАДАЧИ

3.1. Покажите, что в трехмерном физическом пространстве скалярное произведение векторов вида $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|\cos\theta$, где $\theta$ — угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, удовлетворяет требованиям, предъявляемым к скалярному произведению (§ 1).

3.2. Покажите, что если $L_1$ — одномерное подпространство, заданное векторами $(a, a, 0)$, то его ортогональное дополнение $L_2$ определяется векторами $(b, -b, c)$, и представьте вектор $(1, 2, 3)$ в виде суммы двух векторов, один из которых принадлежит подпространству $L_1$, а второй — подпространству $L_2$.

3.3. Пусть скалярное произведение двух функций есть $(f, g)=\int_{-1}^{1} f(x)^* g(x)dx$. Покажите, что функции $f_0(x)=(^1/_2)^{1/2}$ и $f_1(x)=(^3/_4)^{1/2}x$ ортонормальны. Воспользуйтесь методом ортогонализации по Шмидту для построения квадратичной функции $f_2(x)$, ортонормальной функциям $f_0$ и $f_1$. Аналогичным способом постройте кубическую функцию $f_3(x)$.

3.4. Взяв функции $f_n(x)$ из предыдущей задачи в качестве базисных векторов и $\mathsf{T}=x^2$ в качестве оператора, по формуле (3.21) вычислите матричные элементы $T_{01}$, $T_{11}$ и $T_{02}$.

3.5. Покажите, что оператор $\mathsf{T}$ из предыдущей задачи эрмитов, и рассмотрите граничные условия, которые следует наложить на функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$, чтобы оператор $id/dx$ был эрмитовым, если скалярное произведение имеет тот же вид, что и в задаче 3.3.

3.6. Пусть преобразование $\mathsf{R}$ есть поворот вокруг оси $z$ на 90°. Для трех единичных векторов $\mathbf{e}_i$, направленных вдоль осей $x$, $y$ и $z$, найдите $\mathsf{R}\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_i'$. По формулам (3.38) и (3.39) или (3.40) вычислите индуцированное преобразование $\mathsf{T}(\mathsf{R})\,\psi(\mathbf{r})$, где $\psi(\mathbf{r})$ есть: а) $x$, б) $y$, в) $x^2$ и г) $xy$. Выполните то же самое, если $\mathsf{R}$ — поворот вокруг оси $z$ на 45°.

3.7. Исходя из функции $f(x, y)=x^2$, методом ортогонализации по Шмидту постройте ортонормированный базис в пространстве функций $x^2$, $y^2$ и $xy$ предыдущей задачи, если скалярное произведение имеет вид $(f(x, y), g(x, y))=\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy\, f(x, y)\, g^*(x, y)$. Найдите матрицу $\mathsf{T}(\mathsf{R})$, где $\mathsf{R}$ — поворот на 90° относительно оси $z$. Приведите матрицу к диагональному виду, определите собственные значения и собственные векторы.

3.8. Пусть $\mathsf{R}$ — оператор поворота вокруг оси $z$ на 45°, а $\mathsf{T}$ — оператор поворота вокруг оси $x$ на 90°. Покажите геометрически, что $\mathsf{TRT}^{-1}$ есть оператор поворота вокруг оси $y$ против часовой стрелки на 45° (поворота вокруг оси $-y$). Подтвердите этот результат, перемножая матрицы соответствующих операторов в базисе $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$. [Это частный случай общего соотношения (2.12).]

3.9. Покажите, что если оператор $\mathsf{S}$ есть $\partial/\partial r_i$, то трансформированный оператор $\mathsf{TST}^{-1}$ в обозначениях формулы (3.38) есть $\partial/\partial \bar{r}_i$.