
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

В двух предыдущих главах были введены два математических понятия: группы (гл. 2) и векторного пространства (гл. 3). Теперь мы объединим эти два понятия и рассмотрим взаимосвязь между элементами группы и преобразованиями векторного пространства. В этой главе, начиная с § 6 и далее, нам в ряде случаев понадобится вычислять сумму по всем групповым элементам. Для конечных групп это не составляет труда, но в бесконечных группах (гл. 2, § 2) суммирование заменяется интегрированием и возникает проблема сходимости интегралов. Исследование данного вопроса мы оставим до гл. 7, а пока скажем лишь, что в большинстве интересных с физической точки зрения непрерывных групп сумму можно заменить интегралом, если его определить соответствующим образом.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ

Если в векторном пространстве L можно найти набор T линейных операторов $T(G_a)$ (гл. 3, § 3), которые соответствуют элементам G_a группы \mathfrak{G} в том смысле, что

$$T(G_a)T(G_b)=T(G_aG_b), \quad T(E)=1, \quad (4.1)$$

то такой набор T называется «представлением» группы \mathfrak{G} в пространстве L . Таким образом, представление группы \mathfrak{G} есть «отображение» элементов G_a на операторы $T(G_a)$ в векторном пространстве L . Если размерность пространства L равна s , то представление называют s -мерным. Пространство L называют пространством представлений T .

Представление $T(G_a)$ называется точным, если существует взаимно-однозначное соответствие (изоморфизм) между операциями $T(G_a)$ и групповыми элементами G_a .

Вообще говоря, можно рассматривать и отображение многих математических объектов в один, т. е. представление нескольких групповых элементов одним и тем же оператором. Примером может служить крайний случай «тождественного представления», когда все элементы представлены оператором идентичности 1.

§ 2. МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

На практике оператор обычно задают его матрицей в некотором выбранном базисе. Выбрав базис $e_1, e_2, e_3, \dots, e_s$ в пространстве L , мы можем для каждого оператора $T(G_a)$ построить матрицу (гл. 3, § 3) по формуле

$$T(G_a)e_i = \sum_j T_{ji}(G_a)e_j. \quad (4.2)$$

Набор матриц $T(G_a)$ с матричными элементами $T_{ji}(G_a)$ образует матричное представление группы. Как и должно быть, матрицы $T(G_a)$ удовлетворяют уравнению (4.1) обычного матричного умножения

$$T(G_a)T(G_b) = T(G_aG_b). \quad (4.3)$$

Это прямо следует из (4.1) и (4.2), поскольку

$$\begin{aligned} T(G_a)T(G_b)e_i &= \sum_j T(G_a)T_{ji}(G_b)e_j = \\ &= \sum_j \sum_k T_{ji}(G_b)T_{kj}(G_a)e_k \end{aligned}$$

и

$$T(G_a)T(G_b)e_i = T(G_aG_b)e_i = \sum_k T_{ki}(G_aG_b)e_k,$$

так что

$$T_{ji}(G_aG_b) = \sum_k T_{kj}(G_a)T_{ji}(G_b).$$

На практике для вычисления матричных элементов с использованием ортонормированного базиса, как правило, удобнее пользоваться соотношением

$$T_{ji}(G_a) = (e_j, T(G_a)e_i), \quad (4.4)$$

которое прямо следует из равенства (4.2).