§ 8. СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОСТИ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Из сказанного в § 5—7 можно сделать вывод, что задача исследования представлений группы сводится к изучению неэквивалентных неприводимых представлений, обладающих, как мы сейчас установим, важными свойствами ортогональности. Эти свойства составляют ядро математической теории представлений, позволяют нам легко оперировать с ними и лежат в основе большинства физических проявлений симметрии. Свойства ортогональности следуют из двух положений, носящих название лемм Шура. Они были выведены Шуром в 1905 г. «Леммой» математики называют промежуточное заключение, которое необходимо сделать при выводе теоремы или какого-либо положения. Вначале мы сформулируем эти две леммы, затем рассмотрим их следствия, а в конце параграфа докажем их.

Первая лемма Шура. Пусть $\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)$ — неприводимое представление группы $\mathcal{G}$ в пространстве L, и пусть A — фиксированный оператор в L. Тогда, если для всех элементов G_a группы $\mathcal{G}$ выполняется равенство $\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)\mathsf{A}=\mathsf{A}\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)$, то $\mathsf{A}=\lambda 1$, где 1 есть тождественный (или единичный) оператор. Другими словами, всякий фиксированный оператор, коммутирующий с операторами $\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)$ неприводимого представления для любых G_a из группы $\mathcal{G}$, является единичным оператором с точностью до постоянного множителя.

Вторая лемма Шура. Пусть $\mathsf{T}^{(1)}(\mathsf{G}_a)$ и $\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)$ — два неприводимых представления группы $\mathcal{G}$ в пространствах L_1 и L_2 размерностей s_1 и s_2, и пусть A — оператор, переводящий векторы из L_2 в L_1. Тогда, если представления $\mathsf{T}^{(1)}$ и $\mathsf{T}^{(2)}$ неэквивалентны и для всех элементов G_a группы $\mathcal{G}$ выполняется равенство $\mathsf{T}^{(1)}(\mathsf{G}_a)\mathsf{A}=\mathsf{A}\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)$, то $\mathsf{A}=0$, т. е. A — нулевой оператор.

Воспользуемся теперь леммами Шура для вывода соотношений ортогональности матричных представлений. Рассмотрим два неприводимых представления $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)$ и $\mathsf{T}^{(\beta)}(\mathsf{G}_a)$ группы $\mathcal{G}$, причем $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)$ определено в пространстве L_α, а $\mathsf{T}^{(\beta)}(\mathsf{G}_a)$ — в L_β. Пусть X — некоторый оператор, преобразующий векторы пространства L_β в векторы пространства L_α. Мы можем теперь показать,

что оператор A вида

$$A=\sum_b T^{(\alpha)}(G_b)\,X T^{(\beta)}(G_b^{-1}) \tag{4.18}$$

как раз обладает свойствами оператора A в леммах Шура, ибо

$$\begin{aligned}
T^{(\alpha)}(G_a)\,A &= \sum_b T^{(\alpha)}(G_a)\,T^{(\alpha)}(G_b)\,X T^{(\beta)}(G_b^{-1}) = \\
&= \sum_b T^{(\alpha)}(G_aG_b)\,X T^{(\beta)}(G_b^{-1})\,T^{\beta}(G_a^{-1})\,T^{(\beta)}(G_a) = \\
&= \sum_b T^{(\alpha)}(G_aG_b)\,X T^{(\beta)}((G_aG_b)^{-1})\,T^{(\beta)}(G_a) = \\
&= \sum_c T^{(\alpha)}(G_c)\,X T^{(\beta)}(G_c^{-1})\,T^{(\beta)}(G_a) = \\
&= A T^{(\beta)}(G_a).
\end{aligned}$$

Мы здесь использовали то свойство группы, что произведение $G_aG_b=G_c$ двух элементов, в котором элемент a фиксирован, а b пробегает всю группу, также пробегает все групповые элементы (гл. 2, § 9). Рассмотрим два случая:

1) $T^{(\alpha)}$ и $T^{(\beta)}$ — одно и то же представление, откуда по лемме Шура $A=\lambda 1$;

2) $T^{(\alpha}$ и $T^{(\beta)}$ неэквивалентны, и по лемме Шура $A=0$. Эти два случая можно объединить в одно равенство

$$A=\lambda\delta_{\alpha\beta}1, \tag{4.19}$$

считая, что в нем $\delta_{\alpha\beta}=0$, когда неприводимые представления $T^{(\alpha)}$ и $T^{(\beta)}$ неэквивалентны, и $\delta_{\alpha\beta}=1$, когда $T^{(\alpha)}$ и $T^{(\beta)}$ — одно и то же представление. Случай, когда $T^{(\alpha)}$ и $T^{(\beta)}$ эквивалентны, но не совпадают, не охватывается данным равенством, но он не представляет для нас интереса.

Содержание обеих лемм Шура при выборе оператора A в форме (4.18) можно свести к одному равенству

$$\sum_{a=1}^{g}\sum_{m=1}^{s_\beta}\sum_{k=1}^{s_\alpha} T_{ik}^{(\alpha)}(G_a)\,X_{km}T_{mj}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = A_{ij}=\lambda\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}, \tag{4.20}$$

где X — совершенно произвольная прямоугольная матрица, но множитель λ зависит от выбора X. Мы восполь-

зуемся свободой выбора матрицы X и положим ее элементы равными $X_{km}=\delta_{kp}\delta_{mq}$; другими словами, мы выбираем матрицу X, все элементы которой — нули, кроме одного элемента, расположенного на пересечении p-й строки с q-м столбцом, который принимается равным единице. При таком выборе в формуле (4.20) исчезнут два знака суммирования и останется выражение

$$\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a)\, T_{qj}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = \lambda\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}. \qquad (4.21)$$

Величина λ имеет смысл, только если $\alpha=\beta$ и $i=j$; в этом случае, просуммировав по i обе части равенства (4.21), получим

$$\sum_{i=1}^{s_\alpha}\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a)\, T_{qi}^{(\alpha)}(G_a^{-1}) = \lambda\sum_{i=1}^{s_\alpha} 1 = \lambda s_\alpha,$$

т. е.

$$\sum_{a=1}^{g} T_{qp}^{(\alpha)}(E) = \lambda s_\alpha$$

и, следовательно,

$$\lambda = g\delta_{pq}/s_\alpha,$$

ибо образом тождественной операции E является единичная матрица. Подставляя в формулу (4.21) это выражение для λ, получаем

$$\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a)\, T_{qj}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = g\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{pq}/s_\alpha. \qquad (4.22)$$

Если матричное представление $\mathbf{T}^{(\beta)}$ унитарно, то возможно дальнейшее упрощение. Так как

$$\mathbf{T}^{(\beta)}(G_a^{-1})\,\mathbf{T}^{(\beta)}(G_a) = \mathbf{T}^{(\beta)}(E) = 1,$$

мы имеем

$$\mathbf{T}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = (\mathbf{T}^{(\beta)}(G_a))^{-1},$$

а поэтому если матрица $\mathbf{T}$ унитарна, то

$$T_{qi}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = T_{iq}^{(\beta)}(G_a)^*,$$

и при подстановке в равенство (4.22) в итоге получим

$$\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a)\, T_{iq}^{(\beta)}(G_a)^* = g\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{pq}/s_\alpha. \qquad (4.23)$$

Данное соотношение ортогональности является чрезвычайно мощным. Заметим, что индексы матричных элементов, стоящих в левой части, выбраны совершенно произвольно, а суммирование производится только по элементам группы. Соотношение (4.23) показывает, что получаемая сумма обращается в нуль, если α и β — неэквивалентные неприводимые представления. Даже если представления α и β совпадают, сумма остается нулевой, пока в левую часть входят различные матричные элементы, т. е. если $i \neq j$ или $p \neq q$. Единственную ситуацию, в которой сумма отлична от нуля при произвольных i и p, можно изобразить так:

$$\sum_{a=1}^{g} |T_{ip}^{(\alpha)}(G_a)|^2 = g/s_\alpha.$$

Содержащуюся в соотношении ортогональности операцию суммирования по всем групповым элементам часто называют «усреднением по группе». В более строгом смысле для усреднения по группе требуется разделить получаемую сумму на общее число g элементов группы. Термин «соотношение ортогональности» для формулы (4.23) означает, что в некотором векторном пространстве некое скалярное произведение обращается в нуль. Использование этого термина в данном случае оправдывается, если рассматривать набор матричных элементов $T_{ip}^{(\alpha)}(G_a)$ для фиксированных α, i и p как обозначенные индексом a компоненты вектора в g-мерном пространстве. Скалярное произведение двух векторов определяется в этом пространстве обычным образом [формула (3.7)] как сумма по компонентам. Тогда формула (4.23) констатирует ортогональность таких векторов с разными наборами индексов α, i и p.

Важно понять, что соотношение ортогональности выполняется только для неприводимых представлений. Из этого, как мы вскоре увидим, вытекает простой алгебраический критерий приводимости представления.

Прежде чем продолжить наши рассуждения, отметим два момента, вытекающие из полученных результатов. Во-первых, покажем, что неприводимые представления абелевых групп одномерны. Пусть $\mathsf{T}^{(\alpha)}(G_a)$ — неприводимое представление абелевой группы $\mathcal{G}$. Так как по

определению элементы абелевой группы коммутируют, для любых G_a и G_b из $\mathcal{G}$ имеем

$$\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\,\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_b)=\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_b)\,\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a).$$

Отсюда по первой лемме Шура следует, что $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)$ отличается от единичного оператора постоянным множителем, т. е. $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)=\lambda_a^{(\alpha)}\mathsf{1}$. Таким образом, представление $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)$ для всех G_a является диагональным и поэтому должно быть либо приводимым, либо одномерным. Первое предположение противоречит исходным посылкам; следовательно, неприводимые представления абелевых групп одномерны.

В качестве второго примера докажем ортогональность неприводимых представлений группы D_3. В § 3, п. А мы уже определили два из них: одномерное представление $\mathsf{T}^{(2)}$ и двумерное $\mathsf{T}^{(3)}$. Кроме того, в любой группе существует тождественное представление $\mathsf{T}^{(1)}$. Эти три представления даны в табл. 4.1. Все они являются неприводимыми (задача 4.7) и могут использоваться для иллюстрации ортогональности. Размерности представлений, очевидно, равны $s_1=1$, $s_2=1$ и $s_3=2$, а размерность группы $g=6$. Применяя формулу (4.23) к данному случаю, получаем

$$\sum_{a=1}^{6}\left[T_{ip}^{(3)}(\mathsf{G}_a)\right]^2=6/2=3 \text{ при любых } i \text{ и } p,$$

$$\sum_{a=1}^{6}T_{ip}^{(3)}(\mathsf{G}_a)\,\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)=0 \text{ при любых } i \text{ и } p,$$

$$\sum_{a=1}^{6}\mathsf{T}^{(1)}(\mathsf{G}_a)\,\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)=0,$$

$$\sum_{a=1}^{6}\left[\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)\right]^2=6/1=6 \text{ и т. д.}$$

А. Доказательство первой леммы Шура

Пусть $\mathbf{r}$ — собственный вектор оператора A в пространстве L с собственным значением λ, так что $\mathsf{A}\mathbf{r}=\lambda\mathbf{r}$. Если теперь $\mathbf{r}$ преобразованием $\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)$ переводится в новый вектор $\mathbf{r}_a=\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)\mathbf{r}$, то $\mathbf{r}_a$ также будет собственным вектором оператора A с тем же собственным значением

Таблица 4.1

Представление \ Элементы группы G'_a	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
$T^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$T^{(2)}$	1	1	1	-1	-1	-1
$T^{(3)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

λ, поскольку

$$\mathsf{A}\mathbf{r}_a = \mathsf{A}\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)\mathbf{r} = \mathsf{T}(\mathsf{G}_a)\mathsf{A}\mathbf{r} = \mathsf{T}(\mathsf{G}_a)\lambda\mathbf{r} = \lambda\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}_a.$$

Если G_a пробегает всю группу $\mathcal{G}$, то набор векторов $\mathbf{r}_a$ должен порождать инвариантное подпространство, так как

$$\mathsf{T}(\mathsf{G}_b)\mathbf{r}_a = \mathsf{T}(\mathsf{G}_b)\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)\mathbf{r} = \mathsf{T}(\mathsf{G}_b\mathsf{G}_a)\mathbf{r} = \mathbf{r}_c,$$

где c определяется из соотношения $\mathsf{G}_b\mathsf{G}_a = \mathsf{G}_c$ групповой таблицы умножения. Но так как пространство L по определению неприводимо, оно не может содержать инвариантного подпространства. Таким образом, пространство векторов $\mathbf{r}_a$ обязано совпадать со всем пространством L. Следовательно, для любого вектора $\mathbf{R} = \sum_a c_a\mathbf{r}_a$ в L имеем

$$\mathsf{A}\mathbf{R} = \mathsf{A}\sum_a c_a\mathbf{r}_a = \sum_a c_a\mathsf{A}\mathbf{r}_a = \sum_a c_a\lambda\mathbf{r}_a = \lambda\mathbf{R},$$

но так как $\mathbf{R}$ — произвольный вектор пространства L, то $\mathsf{A} = \lambda\mathsf{1}$. В матричной форме оператор A просто будет равняться величине λ, умноженной на единичную матрицу.

Б. Доказательство второй леммы Шура

Рассмотрим вначале случай $s_2 \leqslant s_1$. Тогда A переводит L_2 в подпространство L_A некоторой размерности $s_A \leqslant s_2 \leqslant s_1$ в пространстве L_1. Подпространство L_A состоит из векторов $\mathsf{A}\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — произвольный вектор в L_2. Отсюда тотчас же следует, что пространство L_A инвариантно относительно преобразований группы $\mathcal{G}$, поскольку

$$\mathsf{T}^{(1)}(\mathsf{G}_a)\mathsf{A}\mathbf{r} = \mathsf{A}\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)\mathbf{r} = \mathsf{A}\mathbf{r}_a,$$

и этот вектор принадлежит пространству L_A, так как вектор $\mathbf{r}_a = [\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)\mathbf{r}]$ принадлежит L_2. Однако представление $\mathsf{T}^{(1)}$ по определению неприводимо, а поэтому L_1 не может иметь инвариантного подпространства. Таким образом, мы приходим к противоречию, если только L_A не является ни нульмерным пространством ($s_A = 0$), ни полным пространством L_1 ($s_A = s_1$). Иными словами, мы доказали, что либо 1) $\mathsf{A}\mathbf{r} = 0$ для любых $\mathbf{r}$ в L_2, т. е. $\mathsf{A} = 0$,

либо 2) $s_A=s_1=s_2$. Последнее равенство вытекает из неравенства $s_A\leqslant s_2$ и условия $s_2\leqslant s_1$.

Вторая из этих альтернатив исключается в силу условия, что $\mathsf{T}^{(1)}$ и $\mathsf{T}^{(2)}$ — неэквивалентные представления. Она означала бы, что L_1 и L_2 имеют одинаковую размерность; отсюда следовало бы существование оператора A^{-1}, обратного оператору A, и поэтому из допущения $\mathsf{T}^{(1)}(\mathsf{G}_a)\mathsf{A}=\mathsf{A}\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)$ следовало бы, что $\mathsf{T}^{(1)}(\mathsf{G}_a)=\mathsf{A}\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)\mathsf{A}^{-1}$, т. е. что представления $\mathsf{T}^{(1)}$ и $\mathsf{T}^{(2)}$ эквивалентны. Остается заключить, что $\mathsf{A}=0$.

В случае $s_2>s_1$ доказательство аналогично. В этом случае с необходимостью $s_A<s_2$, а поэтому должны существовать векторы $\mathbf{r}$ в L_2, которые переводятся преобразованием A в нуль, т. е. для которых $\mathsf{A}\mathbf{r}=0$. Подпространство этих векторов в L_2 обозначим через L_B; его размерность будет равна s_2-s_A. Тогда пространство L_B обязано быть инвариантным, так как если $\mathbf{r}_a=\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)\mathbf{r}$, то $\mathsf{A}\mathbf{r}_a=\mathsf{A}\mathsf{T}^{(2)}(\mathsf{G}_a)\mathbf{r}=\mathsf{T}^{(1)}(\mathsf{G}_a)\mathsf{A}\mathbf{r}=0$, из чего видно, что $\mathbf{r}_a$ тоже принадлежит пространству L_B. Это противоречит условию неприводимости представления $\mathsf{T}^{(2)}$, если только не выполняется равенство $L_B=L_2$, другими словами, $\mathsf{A}\mathbf{r}=0$ для *всех* векторов $\mathbf{r}$ в L_2. Таким образом, мы снова приходим к выводу, что $\mathsf{A}=0$.

§ 9. ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Как говорилось в § 6, для всякого данного представления можно построить бесконечное число эквивалентных матричных представлений путем изменения базиса (т. е. преобразования подобия). Мы хотим найти некоторые вполне определенные свойства представлений, которые не зависят от таких преобразований. В принципе можно построить много инвариантов, поскольку преобразование подобия не изменяет собственных значений матрицы. Но в большинстве случаев достаточно одной-единственной характеристики, и наиболее подходящей для этой цели оказывается сумма всех собственных значений, называемая «следом» матрицы и равная сумме ее диагональных элементов в любом базисе. Такой след матричного представления $\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)$ обозначается через $\chi(\mathsf{G}_a)$. Набор чисел $\chi(\mathsf{G}_a)$, где G_a пробегает все элементы группы, называется «характером» представления T и обозна-