меньше столбцов (по одному на каждый класс, а не на каждый элемент группы). При использовании соотношения ортогональности для характеров следует не забывать включать число c_p групповых элементов в каждом классе.

§ 11. ПРИВЕДЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП

В § 5 и 7 мы показали, как в принципе можно привести произвольное представление T к его неприводимым составляющим. Просуммировав диагональные элементы матрицы T [формула (4.17)], мы сразу увидим, что характер χ представления связан с характерами неприводимых представлений таким же соотношением. Если характер представления T для элементов класса $\mathscr{C}_p$ обозначить через χ_p, то получим

$$\chi_p = \sum_\alpha m_\alpha \chi_p^{(\alpha)}, \tag{4.27}$$

где числа m_α показывают, сколько раз в разложении представления T встречается каждое неэквивалентное неприводимое представление $\mathsf{T}^{(\alpha)}$. Понятно, что возможность определить эти m_α для данного T весьма заманчива, и это действительно делается очень просто, если только известны характеры неприводимых представлений $\chi_p^{(\alpha)}$. Используя соотношение ортогональности (4.25б) и формулу (4.27), получаем

$$\frac{1}{g}\sum_p c_p \chi_p^{(\beta)*}\chi_p = \frac{1}{g}\sum_\alpha m_\alpha \sum_p c_p \chi_p^{(\beta)*}\chi_p^{(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{g}\sum_\alpha m_\alpha g \delta_{\alpha\beta} = m_\beta. \tag{4.28}$$

Это выражение для скалярного произведения характера χ на характер неприводимого представления $\chi^{(\beta)}$ аналогично формуле (3.6) для «компоненты» m_β характера χ в направлении «вектора» $\chi^{(\beta)}$. В качестве иллюстрации рассмотрим трехмерное представление T из § 3, п. А. Его характер равен (3, 0, —1), где числа соответствуют χ_p для трех классов группы D_3 и взяты в том же порядке, в котором эти классы расположены в табл. 4.2. Записав

в обозначениях таблицы

$$\mathrm{T} = m_1\mathrm{T}^{(1)} \oplus m_2\mathrm{T}^{(2)} \oplus m_3\mathrm{T}^{(3)},$$

с учетом формулы (4.28) получим

$$m_1 = \frac{1}{6}(3+0-3) = 0,$$

$$m_2 = \frac{1}{6}(3+0+3) = 1,$$

$$m_3 = \frac{1}{6}(6+0+0) = 1.$$

Отсюда следует, что представление T приводится к сумме представлений $\mathrm{T}^{(2)}$ и $\mathrm{T}^{(3)}$. Это почти тривиальный пример, поскольку такое разложение явствует из самого вида матриц. Тем не менее он показывает, что наш метод неплохо застрахован от ошибок: величины m_α должны быть целыми положительными числами или нулями.

Более содержательный пример дает шестимерное представление, рассмотренное в примере § 3, п. В (задача 4.9).

§ 12. КРИТЕРИЙ НЕПРИВОДИМОСТИ

По характеру представления сразу можно судить, неприводимое оно или нет. В § 10 было показано, что если представление χ неприводимо, то

$$\sum_p c_p |\chi_p|^2 = g. \tag{4.29}$$

Можно также доказать, что если выполняется условие (4.29), то представление χ неприводимо; таким образом, (4.29) — необходимое и достаточное условие. Для доказательства обратимся к равенствам (4.25) и (4.27), которые можно объединить в соотношение

$$\sum_p c_p |\chi_p|^2 = \sum_{\alpha\beta p} c_p m_\alpha m_\beta \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)*} = g \sum_\alpha m_\alpha^2.$$

Поэтому, если справедливо равенство (4.29), то $\sum_\alpha m_\alpha^2 = 1$, а так как все m_α целые, отсюда следует, что все числа m_α равны нулю, кроме одного из них, которое мы обозначим через m_γ,— оно равно единице: $m_\gamma = 1$. Мы видим, что $\mathrm{T} = \mathrm{T}^{(\gamma)}$, а последнее есть неприводимое представление.