В качестве примера можно показать, что двумерное представление $\Gamma^{(3)}$ группы D_3 неприводимо, поскольку из табл. 4.2 следует

$$\sum_p \sigma_p |\chi_p|^2 = (4+2+0) = 6 = g.$$

§ 13. ЧИСЛО НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ, РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В § 10 было показано, что число неэквивалентных неприводимых представлений конечной группы $\mathcal{G}$ не может превышать числа классов в этой группе. В примере группы D_3 из табл. 4.2 видно, что имеется три неэквивалентных неприводимых представления. Но в группе D_3 имеется только три класса; это дает нам основание заключить, что $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(3)}$ — все возможные для группы D_3 неэквивалентные неприводимые представления. Вообще говоря, точное число неэквивалентных неприводимых представлений группы хотелось бы определять заранее, и сейчас, пользуясь довольно искусственным приемом, мы покажем, что оно всегда равно числу классов в группе. Прием заключается в том, что мы строим представление весьма специального вида, размерность которого равна числу элементов группы g. Такое представление называется «регулярным» и обозначается через $\Gamma^{(R)}$.

Матрицы $\Gamma^{(R)}(G_a)$ данного регулярного представления определяются соотношением

$$G_a G_b = \sum_c T^{(R)}_{cb}(G_a)\, G_c. \tag{4.30}$$

Нетрудно показать, что матрицы $\Gamma^{(R)}(G_a)$ в самом деле образуют представление. Умножив обе части равенства (4.30) на некоторый групповой элемент G_d, получим

$$\begin{aligned} G_d G_a G_b &= \sum_c T^{(R)}_{cb}(G_a)\, G_d G_c = \\ &= \sum_c \sum_e T^{(R)}_{cb}(G_a)\, T^{(R)}_{ec}(G_d)\, G_e = \\ &= \sum_e \left[\sum_c T^{(R)}_{ec}(G_d)\, T^{(R)}_{cb}(G_a) \right] G_e. \end{aligned}$$

Но в то же время $G_d G_a G_b = (G_d G_a) G_b = \sum T_{cb}^{(R)} (G_d G_a) G_c$; сравнивая это равенство с предыдущим, получаем

$$T^{(R)}(G_d G_a) = T^{(R)}(G_d)\, T^{(R)}(G_a),$$

т. е. условие (4.1), которым определяется представление. Отметим, что, поскольку произведение $G_a G_b$ тоже является элементом группы, сумма в правой части равенства (4.30) содержит только один член. Следовательно, при данных a и b все матричные элементы $T_{cb}^{(R)}(G_a)$ обращаются в нуль, кроме соответствующего одному значению c, который равен 1. Таким образом, все столбцы матрицы $T^{(R)}(G_a)$ будут состоять из нулей и одной единицы и эта единица будет располагаться на диагонали только тогда, когда G_a есть единичный элемент E. Следовательно, характеры регулярного представления будут равны нулю для всех элементов, кроме единичного, для которого характер равен размерности представления g, т. е.

$$\chi^{(R)}(G_a) = 0, \quad G_a \neq E, \quad \chi^{(R)}(E) = g. \tag{4.31}$$

Посмотрим теперь, как приводится регулярное представление

$$T^{(R)}(G_a) = \sum_{\alpha} m_\alpha T^{(\alpha)}(G_a).$$

С учетом формул (4.28) и (4.31) получаем

$$m_\alpha = \frac{1}{g} \sum_a \chi^{(\alpha)}(G_a)^* \chi^{(R)}(G_a) = \frac{1}{g} g \chi^{(\alpha)}(E) = s_\alpha, \tag{4.32}$$

где s_α — размерность неприводимого представления $T^{(\alpha)}$. Таким образом, неприводимое представление $T^{(\alpha)}$ встречается в разложении регулярного представления столько раз, какова его размерность s_α. Это означает, что регулярное представление должно содержать все неприводимые представления.

Приравняв размерность g представления T^R суммарной размерности его составляющих, получим важный результат

$$g = \sum_\alpha m_\alpha s_\alpha = \sum_\alpha s_\alpha^2. \tag{4.33}$$

Отметим, что соотношение (4.32) относится к регулярному представлению, а формула (4.33) выражает общее свой-

ство группы, а именно то, что сумма квадратов размерностей всех возможных неэквивалентных неприводимых представлений группы равна числу ее элементов. Теперь на основании равенства (4.33) докажем, что число неэквивалентных неприводимых представлений группы равно числу классов этой группы.

Доказательство. В § 8 было показано, что матричные элементы $T_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{G}_a)$ можно рассматривать как компоненты некоего набора взаимно ортогональных векторов $\mathbf{T}_{ij}^{(\alpha)}$ в g-мерном пространстве с базисом $\mathbf{e}_a$, где $a=1, 2, \ldots, g$. Общее число таких векторов определяется всеми возможными значениями индексов i, j и α и равно сумме $\sum_\alpha s_\alpha^2$ по всем неэквивалентным неприводимым представлениям. Но как только что было показано, эта сумма равняется g. Следовательно, число ортогональных векторов $\mathbf{T}_{ij}^{(\alpha)}$ равно размерности пространства и, стало быть, векторы $\mathbf{T}_{ij}^{(\alpha)}$ должны образовывать пространство. Поэтому любой вектор $\mathbf{v}$ в этом пространстве можно представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{T}_{ij}^{(\alpha)}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha ij} c(\alpha_{ij})\, \mathbf{T}_{ij}^{(\alpha)},$$

а его компоненты v_a в базисе $\mathbf{e}_a$ — в виде

$$v_a = \sum_{\alpha ij} c(\alpha_{ij})\, T_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{G}_a). \qquad (4.34)$$

Выделим только те векторы $\mathbf{v}$, которые имеют одинаковые «проекции» на все «направления» $\mathbf{e}_a$; они соответствуют элементам одного и того же класса группы $\mathbf{G}$, т. е. $v_c=v_a$, если $\mathbf{G}_c=\mathbf{G}_b^{-1}\mathbf{G}_a\mathbf{G}_b$ для любого $\mathbf{G}_b$ из $\mathcal{G}$. Поэтому можно записать

$$v_a = \frac{1}{g}\sum_{b=1}^{g} v_c = \quad (\text{где } \mathbf{G}_c = \mathbf{G}_b^{-1}\mathbf{G}_a\mathbf{G}_b)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_b \sum_{\alpha ij} c(\alpha_{ij})\, T_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{G}_b^{-1}\mathbf{G}_a\mathbf{G}_b) = \quad [\text{формула } (4.34)]$$

$$= \frac{1}{g}\sum_b \sum_{\alpha ij} \sum_{kl} c(\alpha_{ij})\, T_{ik}^{(\alpha)}(\mathbf{G}_b^{-1})\, T_{kl}^{(\alpha)}(\mathbf{G}_a)\, T_{lj}^{(\alpha)}(\mathbf{G}_b) = \qquad (4.35)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{\alpha ij} \sum_{kl} c(\alpha_{ij})\, T_{kl}^{(\alpha)}(\mathbf{G}_a)\, \delta_{ij}\delta_{kl} g/s_\alpha = \quad [\text{с учетом } (4.22)]$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{s_\alpha} \sum_{ij} c(\alpha_{ij})\, \chi^{(\alpha)}(\mathbf{G}_a).$$

Эти векторы v образуют подпространство размерности n, где n — число классов, и формула (4.35) показывает, что характеры, являющиеся набором ортонормированных векторов в этом подпространстве (§ 10), также образуют его базис. Отсюда вытекает, что должно быть ровно n таких характеров $\chi^{(\alpha)}$, т. е. число неэквивалентных неприводимых представлений равно n — числу классов группы $\mathcal{G}$, что и требовалось доказать.

§ 14. ВТОРОЕ СООТНОШЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП

Равенство числа классов числу неэквивалентных неприводимых представлений означает, что таблица характеров, в которой столбцы соответствуют классам, а строки — неприводимым представлениям, должна быть квадратной. В силу соотношения ортогональности (4.25) любые две строки в такой таблице ортогональны, и отсюда мы можем заключить, что и для двух произвольных столбцов таблицы также существует соотношение ортогональности.

Чтобы вывести это соотношение, построим матрицу B размерности $n \times n$, элементы которой таковы:

$$B_{\alpha p} = \left(\frac{c_p}{g}\right)^{1/2} \chi_p^{(\alpha)},$$

где n — число классов, а также число неэквивалентных неприводимых представлений. Из соотношения ортогональности (4.25) следует, что при любых α и β

$$\sum_p B_{\beta p} B_{\alpha p}^* = 1$$

или, в матричной форме, $\mathsf{BB}^\dagger = 1$. Поскольку матрица B квадратная, отсюда следует, что модуль ее детерминанта равен 1, что существует обратная матрица B^{-1} и $\mathsf{B}^{-1} = \mathsf{B}^\dagger$. Поэтому также и $\mathsf{B}^\dagger\mathsf{B} = 1$, что для матричных элементов означает

$$\sum_\alpha B_{\alpha p}^* B_{\alpha q} = \delta_{pq}.$$