Эти векторы v образуют подпространство размерности n, где n — число классов, и формула (4.35) показывает, что характеры, являющиеся набором ортонормированных векторов в этом подпространстве (§ 10), также образуют его базис. Отсюда вытекает, что должно быть ровно n таких характеров $\chi^{(\alpha)}$, т. е. число неэквивалентных неприводимых представлений равно n — числу классов группы $\mathcal{G}$, что и требовалось доказать.

§ 14. ВТОРОЕ СООТНОШЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП

Равенство числа классов числу неэквивалентных неприводимых представлений означает, что таблица характеров, в которой столбцы соответствуют классам, а строки — неприводимым представлениям, должна быть квадратной. В силу соотношения ортогональности (4.25) любые две строки в такой таблице ортогональны, и отсюда мы можем заключить, что и для двух произвольных столбцов таблицы также существует соотношение ортогональности.

Чтобы вывести это соотношение, построим матрицу B размерности $n \times n$, элементы которой таковы:

$$B_{\alpha p} = \left(\frac{c_p}{g}\right)^{1/2} \chi_p^{(\alpha)},$$

где n — число классов, а также число неэквивалентных неприводимых представлений. Из соотношения ортогональности (4.25) следует, что при любых α и β

$$\sum_p B_{\beta p} B_{\alpha p}^* = 1$$

или, в матричной форме, $\mathsf{BB}^\dagger = 1$. Поскольку матрица B квадратная, отсюда следует, что модуль ее детерминанта равен 1, что существует обратная матрица B^{-1} и $\mathsf{B}^{-1} = \mathsf{B}^\dagger$. Поэтому также и $\mathsf{B}^\dagger\mathsf{B} = 1$, что для матричных элементов означает

$$\sum_\alpha B_{\alpha p}^* B_{\alpha q} = \delta_{pq}.$$

Вернувшись к характерам группы, получим

$$\sum_{\alpha} \chi_p^{(\alpha)*} \chi_q^{(\alpha)} = \frac{g}{c_p} \delta_{pq}, \tag{4.36}$$

т. е. соотношение ортогональности для столбцов таблицы характеров.

§ 15. ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ХАРАКТЕРОВ

Мы находили элементы таблицы характеров группы D_3 (табл. 4.2), суммируя диагональные элементы построенных ранее матриц представления. Это не самый простой способ построения таблицы характеров. Но таблицы характеров для всех групп, которые могут понадобиться, уже давно вычислены (они приведены в приложении 1). Тем не менее было бы интересно увидеть, как из априорных соображений можно построить таблицу характеров для большинства обычных конечных групп. Это выполняется удивительно просто. Уже найденных нами свойств характеров неприводимых представлений во многих случаях достаточно, чтобы однозначно определить характеры. Выпишем эти свойства.

1. Число неприводимых представлений = числу классов.

2. Размерность s_α неприводимых представлений должна удовлетворять равенству $\sum_{\alpha} s_\alpha^2 = g$, которое во многих случаях дает для s_α единственное решение. Далее, поскольку характер для единичного элемента E равен размерности представления, числа в первом столбце таблицы характеров — это просто целые числа s_α.

3. Для каждой группы существует одномерное тождественное представление, для которого $\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)=1$ и, следовательно, $\chi(\mathsf{G}_a)=1$. Этим определяется одна из строк таблицы; обычно это первая строка.

4. Строки взаимно ортогональны с весами c_p и нормированы к g, т. е.

$$\sum_{p} c_p \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)*} = g\delta_{\alpha\beta} \text{ — это формула (4.25).}$$

В частности, если β — тождественное представление, то для всех представлений α, не совпадающих с тождест-