

и той же строке (т. е. они не преобразуются в соответствии с одной и той же строкой) одного и того же (или эквивалентного) неприводимого представления. Значение этого важного результата заключается не только во взаимной ортогональности базисных функций одного и того же неприводимого представления (множитель  $\delta_{ij}$  при  $\varphi \equiv \psi$ ), так как это в принципе вопрос выбора функций, сколько в ортогональности базисных функций, относящихся к разным строкам эквивалентных представлений или к неэквивалентным представлениям (множитель  $\delta_{\alpha\beta}$ ). Последний результат совершенно не зависит от выбора базиса в каждом из представлений. Кроме того, из равенства (4.38) следует, что скалярное произведение  $(\varphi_i^{(\alpha)}, \psi_i^{(\alpha)})$  не зависит от  $i$  — в частности, функции  $\varphi_i^{(\alpha)}$  для данного  $\alpha$ , удовлетворяющие условию (4.37), имеют одинаковую норму.

Одним из особых следствий из соотношения (4.38) является то обстоятельство, что если  $T^{(\alpha)}$  — тождественное представление, то данное скалярное произведение обращается в нуль для всех представлений  $T^{(\beta)}$ , кроме тождественного. Так, если под скалярным произведением, как обычно, понимать интегрирование по координатам и положить  $\varphi_i^{(\alpha)} = 1$  (постоянная функция), мы получим

$$\int \varphi_i^{(\beta)} dV = 0, \quad (4.39)$$

если только  $T^{(\beta)}$  не является тождественным представлением. Это означает, что интегральная инвариантная характеристика функции, преобразующаяся по неприводимому представлению, обращается в нуль, если только сама функция не инвариантна. Поскольку любую функцию можно разложить на неприводимые компоненты, это означает, что после интегрирования из всех компонент останутся только инвариантные.

## § 17. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

*Прямыми произведением* матрицы  $A$  размерности  $n \times n$  на матрицу  $B$  размерности  $m \times m$  называется матрица размерности  $mn \times mn$ , обозначаемая через  $A \otimes B$ , с матричными элементами

$$(A \otimes B)_{ij, kl} = A_{ik} B_{jl}. \quad (4.40)$$

Каждая строка (и каждый столбец) матрицы прямого произведения обозначается двойным индексом  $ij$ , причем первый индекс  $i$  относится к строке матрицы  $A$ , а второй индекс  $j$  — к строке матрицы  $B$ . Подчеркнем, что  $A \otimes B$  — это не то же самое, что обычное произведение матриц.

Таким способом мы можем построить из двух представлений  $T^{(\alpha)}$  и  $T^{(\beta)}$  их прямое произведение  $T^{(\alpha)} \otimes T^{(\beta)}$ , обозначаемое через  $T^{(\alpha \times \beta)}$ :

$$T_{ij, kl}^{(\alpha \times \beta)}(G_a) = T_{ik}^{(\alpha)}(G_a) T_{jl}^{(\beta)}(G_a). \quad (4.41)$$

Легко показать, что прямое произведение действительно является представлением, ибо

$$\begin{aligned} [T^{(\alpha \times \beta)}(G_a) T^{(\alpha \times \beta)}(G_b)]_{ij, kl} &= \sum_{mn} T_{ij, mn}^{(\alpha \times \beta)}(G_a) T_{mn, kl}^{(\alpha \times \beta)}(G_b) = \\ &= \sum_{mn} T_{im}^{(\alpha)}(G_a) T_{jn}^{(\beta)}(G_a) T_{mk}^{(\alpha)}(G_b) T_{nl}^{(\beta)}(G_b) = \\ &= T_{ik}^{(\alpha)}(G_a G_b) T_{jl}^{(\beta)}(G_a G_b) = T_{ij, kl}^{(\alpha \times \beta)}(G_a G_b). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Характер прямого произведения представлений равен

$$\begin{aligned} \chi^{(\alpha \times \beta)}(G_a) &= \sum_{ij} T_{ij, ij}^{(\alpha \times \beta)}(G_a) = \sum_{ij} T_{ii}^{(\alpha)}(G_a) T_{jj}^{(\beta)}(G_a) = \\ &= \chi^{(\alpha)}(G_a) \chi^{(\beta)}(G_a). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Другими словами, для данного группового элемента характер прямого произведения представлений  $T^{(\alpha \times \beta)}$  равен просто произведению характеров составляющих его представлений  $T^{(\alpha)}$  и  $T^{(\beta)}$ . Если представления  $T^{(\alpha)}$  и  $T^{(\beta)}$  неприводимы, то представление  $T^{(\alpha \times \beta)}$ , размерность которого равна  $s_\alpha s_\beta$ , вообще говоря, не является неприводимым. Но, зная характер  $\chi^{(\alpha \times \beta)}$ , мы можем разложить его на неприводимые представления (§ 11). Так, если

$$T^{(\alpha \times \beta)} = \sum_\gamma m_\gamma T^{(\gamma)}, \quad (4.44)$$

то по формулам (4.43) и (4.28)

$$m_\gamma = \frac{1}{g} \sum_p c_p \chi_p^{(\gamma)*} \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)}. \quad (4.45)$$

<sup>1)</sup> Его называют также тензорным произведением представлений.— Прим. перев.

В качестве упражнения рассмотрим произведение  $T^{(3)} \otimes T^{(3)}$  представлений группы  $D_8$ , характеры которых выписаны в табл. 4.2. По формуле (4.43) характер четырехмерного представления прямого произведения  $T^{(3)} \otimes T^{(3)}$  равен

$$\chi^{(3 \times 3)} = (4, 1, 0),$$

а три его компоненты соответствуют трем классам в табл. 4.2. Записывая теперь

$$\chi^{(3 \times 3)} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \chi^{(\alpha)}$$

и используя формулу (4.28), получаем

$$m_1 = \frac{1}{6} (4 + 2 + 0) = 1,$$

$$m_2 = \frac{1}{6} (4 + 2 + 0) = 1,$$

$$m_3 = \frac{1}{6} (8 - 2 + 0) = 1,$$

так что

$$T^{(3)} \otimes T^{(3)} = T^{(1)} \oplus T^{(2)} \oplus T^{(3)}.$$

На практике прямое произведение представлений органически связано с рассмотрением произведения функций. Если набор из  $s_{\alpha}$  функций  $\varphi_k^{(\alpha)}$  преобразуется по представлению  $T^{(\alpha)}$ , а набор функций  $\psi_l^{(\beta)}$  — по представлению  $T^{(\beta)}$ , то набор из  $s_{\alpha}s_{\beta}$  произведений функций  $\{\varphi_k^{(\alpha)}\psi_l^{(\beta)}\}$  будет преобразовываться по прямому произведению представлений  $T^{(\alpha \times \beta)}$ . Чтобы показать это, рассмотрим

$$T(G_a) \{\varphi_k^{(\alpha)}\psi_l^{(\beta)}\} = \sum_i \sum_j T_{ik}^{(\alpha)}(G_a) T_{jl}^{(\beta)}(G_a) \{\varphi_l^{(\alpha)}, \psi_j^{(\beta)}\} = \\ = \sum_{ij} T_{ij, kl}^{(\alpha \times \beta)}(G_a) \{\varphi_l^{(\alpha)}\psi_j^{(\beta)}\}$$

с учетом формулы (4.41).

Предположим, что прямое произведение представлений приводимо:

$$T^{(\alpha \times \beta)} = \sum_{\gamma} m_{\gamma} T^{(\gamma)}.$$

Тогда можно, изменив базис, выбрать линейные комбинации

$$\Psi_k^{(\gamma)}{}^i = \sum_{ij} C(\alpha\beta\gamma t, ijk) \{\varphi_l^{(\alpha)}\psi_j^{(\beta)}\}, \quad (4.46)$$

которые преобразуются по неприводимому представлению  $T^{(\gamma)}$ . Индекс  $k$  относится здесь к строкам представлений, а индекс  $t$  нужен, чтобы различать функции с одинаковыми  $\gamma$  и  $k$ . Такие функции будут появляться, если целое число  $m_\gamma$  больше 1, т. е. если неприводимое представление  $T^{(\gamma)}$  появляется в разложении (4.44) несколько раз. Коэффициенты  $C(\alpha\beta\gamma t, ijk)$  обычно называются коэффициентами Клебша — Гордана для данной группы. Группы, для которых при любых  $\alpha$  и  $\beta$  коэффициенты  $m_\gamma$  равны 0 или 1, называются «легко приводимыми». Для таких групп (например,  $\mathcal{R}_3$ ) употребление индекса  $t$  необязательно.

Ранее мы предполагали, что функции  $\Phi$  и  $\Psi$  не идентичны; другими словами, мы полагали, что либо  $\alpha \neq \beta$ , либо если  $\alpha = \beta$ , то  $\Phi_i^{(\alpha)} \neq \Psi_i^{(\alpha)}$ . Случай совпадения функций  $\Phi$  и  $\Psi$  требуется рассмотреть отдельно, поскольку набор  $s_\alpha^2$  произведений  $\Phi_i^{(\alpha)}\Phi_j^{(\alpha)}$  не является линейно-независимым. Действительно, например,  $\Phi_i^{(\alpha)}\Phi_j^{(\alpha)} - \Phi_j^{(\alpha)}\Phi_i^{(\alpha)} = 0$ . Отсюда следует, что и функции  $\Psi_k^{(\gamma)t}$  нового базиса не будут линейно-независимыми: при некоторых значениях  $(\gamma)t$  все  $s_\gamma^t$  соответствующих базисных функций одновременно обращаются в нуль. Другими словами, в нуль обращаются одновременно все базисные функции некоторых представлений в сумме (4.44). При этом исчезнут представления, антисимметричные относительно обеих функций; они должны исчезнуть, раз эти функции одинаковы. (Вопрос о симметризации прямого произведения представлений в общем виде рассматривается в т. 2, приложение 3.) В приведенном выше примере произведения  $T^{(3)} \otimes T^{(3)}$  выбор двух одинаковых базисных наборов приведет к тому, что базисные функции представления  $T^{(2)}$  обращаются в нуль.

Коэффициенты Клебша — Гордана обычно нормируют так, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{ijk} |C(\alpha\beta\gamma t, ijk)|^2 = 1.$$

Этим обеспечивается нормировка функций  $\Psi_k^{(\gamma)t}$  при условии, что функции-произведения сами образуют ортонормированный набор. Последнее условие соблюдается всегда, если компоненты произведения  $\Phi$  и  $\Psi$  зависят от разных координат, например относятся к частице 1 и частице

це 2, поскольку тогда исходное скалярное произведение дается выражением

$$(\varphi_i^{(\alpha)}(1) \psi_j^{(\beta)}(2), \varphi_i^{(\alpha)}(1), \psi_j^{(\beta)}(2)) = (\varphi_i^{(\alpha)}(1), \varphi_i^{(\alpha)}(1)) \times \\ \times (\psi_j^{(\beta)}(2), \psi_j^{(\beta)}(2)) = \delta_{\alpha,\alpha} \delta_{\beta,\beta} \delta_{i,i} \delta_{j,j} \quad (4.47)$$

как результат перемножения двух обычных скалярных произведений, вычисляемых отдельно для каждой частицы. В этом случае линейной зависимости быть не может. В силу общих свойств ортогональности неприводимых представлений функции  $\Psi_k^{(\gamma)t}$  ортогональны в отношении  $\gamma$  и  $k$  (§ 16), а для общей ортогональности вводится дополнительный индекс  $t$ . Поэтому набор  $\Psi_k^{(\gamma)t}$  является ортонормированным, преобразование (4.46) — унитарным, а обратное преобразование может быть записано в виде

$$\{\varphi_i^{(\alpha)} \psi_j^{(\beta)}\} = \sum_{rth} C^*(\alpha \beta \gamma t, ijk) \Psi_k^{(\gamma)t}, \quad (4.48)$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношениям ортогональности (унитарности)

$$\sum_{ij} C^*(\alpha \beta \gamma t, ijk) C(\alpha \beta \gamma' t', ijk') = \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{tt'} \delta_{kk'},$$

$$\sum_{\gamma'th} C^*(\alpha \beta \gamma t, ijk) C(\alpha \beta \gamma t, i' j' k) = \delta_{ii'} \delta_{jj'}.$$

Если входящие в произведение функции не обеспечивают ортонормированности (4.47), те же самые коэффициенты Клебша — Гордана могут использоваться в формуле (4.46). Но хотя при этом функции  $\Psi_k^{(\gamma)t}$  останутся ортогональными по отношению к  $\gamma$  и  $k$ , они не будут больше нормированными и в общем случае не будут ортогональны по отношению к прежним образом определенному  $t$ . Модуль некоторых функций  $\Psi_k^{(\gamma)t}$  обратиться в нуль, если, как было сказано выше, функции произведения не являются линейно-независимыми. Но даже в этом случае справедливо обратное соотношение (4.48).

## § 18. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРИ СВЕДЕНИИ К ПОДГРУППЕ

Пусть  $\mathcal{H}$  — подгруппа группы  $\mathcal{G}$ , и пусть  $T^{(\alpha)}(G_a)$  — неприводимое представление группы  $\mathcal{G}$ . Отсюда непосредственно вытекает, что набор операторов  $T^{(\alpha)}(G_a)$