це 2, поскольку тогда исходное скалярное произведение дается выражением

$$(\varphi_{i'}^{(\alpha')}(1)\,\psi_{j'}^{(\beta')}(2),\ \varphi_i^{(\alpha)}(1),\ \psi_j^{(\beta)}(2)) = (\varphi_{i'}^{(\alpha')}(1),\ \varphi_i^{(\alpha)}(1)) \times \\ \times (\psi_{j'}^{(\beta')}(2),\ \psi_j^{(\beta)}(2)) = \delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\beta}\delta_{i'i}\delta_{j'j} \qquad (4.47)$$

как результат перемножения двух обычных скалярных произведений, вычисляемых отдельно для каждой частицы. В этом случае линейной зависимости быть не может. В силу общих свойств ортогональности неприводимых представлений функции $\Psi_k^{(\gamma)t}$ ортогональны в отношении γ и k (§ 16), а для общей ортогональности вводится дополнительный индекс t. Поэтому набор $\Psi_k^{(\gamma)t}$ является ортонормированным, преобразование (4.46) — унитарным, а обратное преобразование может быть записано в виде

$$\{\varphi_i^{(\alpha)}\psi_j^{(\beta)}\} = \sum_{rth} C^*(\alpha\beta\gamma t,\ ijk)\,\Psi_k^{(\gamma)\,t}, \qquad (4.48)$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношениям ортогональности (унитарности)

$$\sum_{ij} C^*(\alpha\beta\gamma t,\ ijk)\,C(\alpha\beta\gamma' t',\ ijk') = \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{tt'}\delta_{kk'},$$

$$\sum_{\gamma tk} C^*(\alpha\beta\gamma t,\ ijk)\,C(\alpha\beta\gamma t,\ i'j'k) = \delta_{ii'}\delta_{jj'}.$$

Если входящие в произведение функции не обеспечивают ортонормированности (4.47), те же самые коэффициенты Клебша — Гордана могут использоваться в формуле (4.46). Но хотя при этом функции $\Psi_k^{(\gamma)t}$ останутся ортогональными по отношению к γ и k, они не будут больше нормированными и в общем случае не будут ортогональны по отношению к прежним образом определенному t. Модуль некоторых функций $\Psi_k^{(\gamma)t}$ обратиться в нуль, если, как было сказано выше, функции произведения не являются линейно-независимыми. Но даже в этом случае справедливо обратное соотношение (4.48).

§ 18. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРИ СВЕДЕНИИ К ПОДГРУППЕ

Пусть $\mathcal{H}$ — подгруппа группы $\mathcal{G}$, и пусть $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)$ — неприводимое представление группы $\mathcal{G}$. Отсюда непосредственно вытекает, что набор операторов $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)$

для элементов G_a подгруппы $\mathscr{H}$ образует представление подгруппы $\mathscr{H}$. Но хотя $T^{(\alpha)}$ по предположению есть неприводимое представление группы $\mathscr{G}$, в качестве представления подгруппы $\mathscr{H}$ оно не обязательно останется неприводимым. Поэтому в общем случае оно будет приводимым, и мы можем написать

$$T^{(\alpha)} = \sum_{\tilde{\alpha}} n_{\alpha\tilde{\alpha}} T^{(\tilde{\alpha})}, \tag{4.49}$$

где суммирование выполняется по всем неприводимым представлениям $T^{(\tilde{\alpha})}$ подгруппы $\mathscr{H}$. Зная из таблиц характеры представлений $T^{(\alpha)}$ и $T^{(\tilde{\alpha})}$, для нахождения коэффициентов разложения снова воспользуемся формулой (4.28). Заметим, что равенство (4.49) относится исключительно к представлениям подгруппы $\mathscr{H}$, и $\chi^{(\alpha)}$ можно определить, рассматривая в таблице характеров неприводимых представлений группы $\mathscr{G}$ только те элементы, которые относятся к подгруппе $\mathscr{H}$.

В качестве примера рассмотрим сведение группы D_3 к подгруппе C_3 (мы встречались с этими группами в гл. 2, § 2, п. Д и Е). Построим вначале таблицу характеров группы C_3. Все неприводимые представления, обозначенные через $\tau^{(\tilde{\alpha})}$, одномерны, так как группа C_3 абелева. Далее, поскольку для всех элементов $R^3=E$, характеры должны быть равны кубическим корням из единицы, т. е. $\exp(2k\pi i/3)$, где $k=0$, 1 и 2; в результате имеем табл. 4.3. Характеры неприводимых представлений $T^{(\alpha)}$ группы D_3 можно перенести из табл. 4.2, используя только те элементы E, R_1 и R_2 группы D_3, которые принадлежат подгруппе C_3 (табл. 4.4). Сразу же получим,

Таблица 4.3

C_3	E	R_1	R_2
$\tau^{(1)}$	1	1	1
$\tau^{(2)}$	1	$\exp(2\pi i/3)$	$\exp(4\pi i/3)$
$\tau^{(3)}$	1	$\exp(4\pi i/3)$	$\exp(2\pi i/3)$

Таблица 4.4

D_3	E	R_1	R_2
$T^{(1)}$	1	1	1
$T^{(2)}$	1	1	1
$T^{(3)}$	2	—1	—1

что для C_3 представление

$$T^{(1)} \equiv T^{(2)} \equiv \tau^{(1)},$$

тогда как двумерное представление сводится к

$$T^{(3)} = \tau^{(2)} \oplus \tau^{(3)}.$$

§ 19. ПРОЕКЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В обычном трехмерном пространстве мы хорошо знакомы с геометрическим понятием проекции вектора на плоскость xy: проекция трехмерного вектора $\mathbf{r}(x, y, z)$ есть просто вектор $(x, y, 0)$, лежащий в плоскости xy. Это понятие проекции на некоторое подпространство можно распространить и на случай пространств более высокой размерности, а также на функциональные пространства.

Рассмотрим векторное пространство L, инвариантное по отношению к преобразованиям $T(G_a)$, индуцированным элементами G_a группы $\mathcal{G}$. В общем случае пространство L не является неприводимым, и, следовательно, его можно разложить на неприводимые подпространства по методу, изложенному в § 5 и 11. Пусть $e_i^{(\alpha)t}$ — набор базисных векторов в L, причем при фиксированных α и t индекс i пробегает s_α строк неприводимого представления $T^{(\alpha)}$, а индекс t служит для случая, когда в L имеется более одного подпространства, преобразующихся по одному и тому же представлению $T^{(\alpha)}$ (или по эквивалентным представлениям). Тогда по определению

$$T(G_a)\, e_i^{(\alpha)t} = \sum_j T_{jt}(G_a)\, e_j^{(\alpha)t}.$$