откуда видно, что три данных оператора преобразуются совершенно аналогично базисным векторам $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$.

В группе всевозможных вращений $\mathcal{R}_3$ данный набор операторов, естественно, неприводим, но если мы будем рассматривать только группу D_3, то, как было показано в § 11, для набора векторов $\mathbf{e}_q$ набор операторов уже не является неприводимым и разобьется на оператор $\partial/\partial z$, преобразующийся по $\mathsf{T}^{(2)}$, и неприводимый набор из двух операторов $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$, преобразующихся по $\mathsf{T}^{(3)}$ (в обозначениях табл. 4.2).

В качестве еще одного примера неприводимого набора операторов рассмотрим умножение на функцию (гл. 3, § 8, п. В). В частности, функции x и y образуют неприводимый набор, преобразующийся по представлению $\mathsf{T}^{(3)}$ группы D_3, поскольку трансформированные операторы — это просто координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$, даваемые формулой (3.39). То обстоятельство, что в эту формулу входят комплексно-сопряженные величины, в данном случае несущественно, поскольку матрица действительная.

§ 21. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

Понятие прямого произведения групп $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ было введено в гл. 2, § 5, а в § 8 той же главы было показано, что классы в такой группе нумеруются парой классов — одним из $\mathcal{G}$, другим из $\mathcal{H}$. Теперь, если заданы два неприводимых матричных представления $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)$ группы $\mathcal{G}$ и $\mathsf{U}^{(\beta)}(\mathsf{H}_b)$ группы $\mathcal{H}$, легко показать, что матрицы прямого произведения, определяемые как

$$\mathsf{T}^{(\alpha\times\beta)}(\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b)=\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\otimes\mathsf{U}^{(\beta)}(\mathsf{H}_b), \tag{4.65}$$

образуют неприводимое представление группы $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$.

Доказательство того, что $\mathsf{T}^{(\alpha\times\beta)}$ является представлением, почти идентично выводу формулы (4.42). Неприводимость представления $\mathsf{T}^{(\alpha\times\beta)}$ следует из его характера, который, как и в формуле (4.43), оказывается равным произведению характеров представлений $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ и $\mathsf{U}^{(\beta)}$:

$$\chi^{(\alpha\times\beta)}(\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b)=\chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\,\chi^{(\beta)}(\mathsf{H}_b). \tag{4.66}$$

Отсюда, суммируя по групповым элементам и используя для $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ формулу (4.29), получаем

$$\sum_{ab}|\chi^{(\alpha\times\beta)}(\mathsf{G}_a\mathsf{H}_b)|^2=\sum_a|\chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)|^2\sum_b|\chi^{(\beta)}(\mathsf{H}_b)|^2=gh.$$

Но поскольку gh есть порядок произведения группы $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$, из этого равенства следует, что представление $\Gamma^{(\alpha\times\beta)}$ неприводимо.

Далее можно показать, что представлениями прямых произведений $\Gamma^{(\alpha\times\beta)}$ исчерпываются все неприводимые представления группы $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$, если α и β пробегают все неприводимые представления $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$. Это проще всего сделать, суммируя квадраты размерностей и пользуясь формулой (4.33):

$$\sum_{\alpha,\beta}(s_\alpha s_\beta)^2=\sum_\alpha s_\alpha^2\sum_\beta s_\beta^2=gh.$$

Таким образом, снова применяя к произведению групп $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ формулу (4.33), мы убеждаемся, что $\Gamma^{(\alpha\times\beta)}$ исчерпывает все неэквивалентные неприводимые представления группы $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$. Таблицу характеров групп прямого произведения получим, просто нумеруя строки и столбцы парами индексов, относящихся к отдельным группам $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ и перемножая соответствующие числа в таблицах характеров каждой отдельной группы.

Таблица 4.6

C_2	E	R
$\Gamma^{(1)}$	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	—1

S_2	E	I
$\Gamma^{(1)}$	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	—1

$C_{2h}=C_2\times S_2$	E	R	I	RI=σ
$\Gamma^{(1\times1)}$	1	1	1	1
$\Gamma^{(1\times2)}$	1	—1	1	—1
$\Gamma^{(2\times1)}$	1	1	—1	—1
$\Gamma^{(2\times2)}$	1	—1	—1	1

В качестве примера возьмем группу $C_2\times S_2$, уже рассматривавшуюся в гл. 2, § 5 и обычно обозначаемую символом C_{2h}. Эта группа является абелевой, так что каждый

элемент сам по себе образует класс. Характеры групп C_2 и S_2 приведены в табл. 4.6, а из них непосредственно выводится таблица характеров группы C_{2h}, где, например, $\mathsf{T}^{(1\times 2)}$ есть представление, построенное из представления $\mathsf{T}^{(1)}$ группы C_2 и представления $\mathsf{T}^{(2)}$ группы S_2.

В качестве другого примера рассмотрим группу $D_{3h}=D_3\times S_1$, с которой мы познакомились в гл. 2, § 2, пример 7. Исходя из характеров группы D_3, которые были приведены в табл. 4.2, и таблицы характеров группы S_1, изоморфной S_2, вычисляются характеры группы D_{3h}; они сведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

D_{3h}	$\mathscr{C}_1(\mathsf{E})$	$\mathscr{C}_2(\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2)$	$\mathscr{C}_3(\mathsf{R}_3, \mathsf{R}_4, \mathsf{R}_5)$	$\mathscr{C}'_1(\sigma_h)$	$\mathscr{C}'_2(\mathsf{R}_1\sigma_h, \mathsf{R}_2\sigma_h)$	$\mathscr{C}'_3(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
$\mathsf{T}^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\mathsf{T}^{(2)}$	1	1	−1	1	1	−1
$\mathsf{T}^{(3)}$	2	−1	0	2	−1	0
$\mathsf{T}^{(1)\prime}$	1	1	1	−1	−1	−1
$\mathsf{T}^{(2)\prime}$	1	1	−1	−1	−1	1
$\mathsf{T}^{(3)\prime}$	2	−1	0	−2	1	0

ЛИТЕРАТУРА

Более строгое математическое изложение теории представлений групп можно найти в книге

Boerner H., Representations of Groups, North-Holland, Amsterdam, 1963.

ЗАДАЧИ

4.1. Покажите, что матрицы $\mathsf{T}(\mathsf{R}_i)$ размерности 3×3 из § 3, п. А имеют ту же таблицу умножения, что и групповые элементы R_i (гл. 2, § 2, табл. 2.5.).

4.2. Постройте представление группы D_4 (см. задачу 2.3) при помощи матриц 3×3 с базисными векторами $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$; ось симметрии четвертого порядка совпадает с осью z.

4.3. Продолжая рассуждения § 3, п. В, постройте матрицы 6×6 для представлений $\mathsf{T}(\mathsf{R}_4)$ и $\mathsf{T}(\mathsf{R}_5)$ и покажите, что произведение $\mathsf{T}(\mathsf{R}_1)\,\mathsf{T}(\mathsf{R}_4)=\mathsf{T}(\mathsf{R}_5)$.

4.4. Исходя из функции $\psi_4=yz$ и группы D_3, постройте инвариантное подпространство, базисом которого служат шесть квадратичных функций, рассмотренных в § 4. Покажите, что представ-