элемент сам по себе образует класс. Характеры групп C_2 и S_2 приведены в табл. 4.6, а из них непосредственно выводится таблица характеров группы C_{2h}, где, например, $\mathsf{T}^{(1\times 2)}$ есть представление, построенное из представления $\mathsf{T}^{(1)}$ группы C_2 и представления $\mathsf{T}^{(2)}$ группы S_2.

В качестве другого примера рассмотрим группу $D_{3h}=D_3\times S_1$, с которой мы познакомились в гл. 2, § 2, пример 7. Исходя из характеров группы D_3, которые были приведены в табл. 4.2, и таблицы характеров группы S_1, изоморфной S_2, вычисляются характеры группы D_{3h}; они сведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

D_{3h}	$\mathscr{C}_1(\mathsf{E})$	$\mathscr{C}_2(\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2)$	$\mathscr{C}_3(\mathsf{R}_3, \mathsf{R}_4, \mathsf{R}_5)$	$\mathscr{C}'_1(\sigma_h)$	$\mathscr{C}'_2(\mathsf{R}_1\sigma_h, \mathsf{R}_2\sigma_h)$	$\mathscr{C}'_3(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
$\mathsf{T}^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\mathsf{T}^{(2)}$	1	1	−1	1	1	−1
$\mathsf{T}^{(3)}$	2	−1	0	2	−1	0
$\mathsf{T}^{(1)\prime}$	1	1	1	−1	−1	−1
$\mathsf{T}^{(2)\prime}$	1	1	−1	−1	−1	1
$\mathsf{T}^{(3)\prime}$	2	−1	0	−2	1	0

ЛИТЕРАТУРА

Более строгое математическое изложение теории представлений групп можно найти в книге

Boerner H., Representations of Groups, North-Holland, Amsterdam, 1963.

ЗАДАЧИ

4.1. Покажите, что матрицы $\mathsf{T}(\mathsf{R}_i)$ размерности 3×3 из § 3, п. А имеют ту же таблицу умножения, что и групповые элементы R_i (гл. 2, § 2, табл. 2.5.).

4.2. Постройте представление группы D_4 (см. задачу 2.3) при помощи матриц 3×3 с базисными векторами $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$; ось симметрии четвертого порядка совпадает с осью z.

4.3. Продолжая рассуждения § 3, п. В, постройте матрицы 6×6 для представлений $\mathsf{T}(\mathsf{R}_4)$ и $\mathsf{T}(\mathsf{R}_5)$ и покажите, что произведение $\mathsf{T}(\mathsf{R}_1)\,\mathsf{T}(\mathsf{R}_4)=\mathsf{T}(\mathsf{R}_5)$.

4.4. Исходя из функции $\psi_4=yz$ и группы D_3, постройте инвариантное подпространство, базисом которого служат шесть квадратичных функций, рассмотренных в § 4. Покажите, что представ-

ление D_3, порождаемое этим подпространством, эквивалентно рассмотренному в § 3, п. А представлению $\Gamma^{(3)}$.

4.5. Найдите характер трехмерного представления группы D_4, полученного в задаче 4.2, и, используя таблицы характеров (приложение 1), покажите, что оно сводится к двумерному и одномерному представлениям. Проверьте этот результат, пользуясь непосредственно матрицами, найденными в задаче 4.2.

4.6. Покажите, что характеры неприводимых представлений циклической группы порядка n равны $\chi^{(m)}(C_n^p)=\exp(2\pi i\, mp/n)$, где $m=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Исходя из этого, постройте таблицу характеров группы вращений C_4 относительно оси четвертого порядка, совпадающей с осью z.

4.7. Покажите, что любое изменение базиса делает матрицу $\Gamma(R_3)$ представления $\Gamma^{(3)}$ в табл. 4.1 (§ 8) недиагональной и поэтому представление $\Gamma^{(3)}$ неприводимо (§ 12).

4.8. Проверьте, удовлетворяют ли приведенные представления задачи 4.5 соотношениям ортогональности (4.23) и критерию неприводимости (4.29).

4.9. Исходя из матриц, найденных в задаче 4.3, вычислите характер представления группы D_3 в шестимерном пространстве, рассмотренном в § 3, п. В, и докажите правильность разложения этого представления на $2\Gamma^{(1)}\oplus 2\Gamma^{(3)}$ (конец § 7).

4.10. Постройте таблицу характеров группы D_4, используя методы § 15. Покажите, что неприводимое представление, найденное в задаче 4.5, содержится в этой таблице.

4.11. Покажите, что функция $f(x, y)=x^2+y^2$ преобразуется по тождественному представлению группы D_4, рассмотренной в задаче 2.3 (ось четвертого порядка — в направлении z). Найдите для каждого представления линейную или квадратичную функцию переменных x, y и z, преобразующуюся по нему.

4.12. Зная ответ задачи 4.10, определите характер прямого произведения двумерного представления группы D_4 на самого себя и разложите его на неприводимые представления.

4.13. Координаты x, y некой частицы преобразуются по двумерному неприводимому представлению Γ группы D_4, так что 4 произведения x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_3 для двух частиц преобразуются по прямому произведению представлений $\Gamma\otimes\Gamma$. Действием проекционного оператора найдите 4 комбинации этих произведений, которые преобразуются по неприводимым представлениям группы D_4. Выпишите коэффициенты Клебша — Гордана.

4.14. Найдите представления группы C_4, на которые будут разлагаться неприводимые представления группы D_4 при сведении последней к подгруппе C_4. (Воспользуйтесь результатами задач 4.6 и 4.10.)

4.15. Взяв проекционный оператор (4.51), покажите, что функция x^3 преобразуется по представлению Γ группы D_4. Характеры возьмите из приложения 1. Далее покажите, что она преобразуется по первой строке представления Γ в базисе задачи 4.5. [Для этого используйте проекционный оператор (4.50).] Наконец, с использованием проекционного оператора (4.52) и матриц, полученных в задаче 4.5, постройте функцию, преобразующуюся по второй строке.