ложение 4, § 3. Соотношения ортогональности и все результаты гл. 4 и 5, являющиеся их следствиями, будут теперь справедливы и для компактных непрерывных групп. В частности, определения таких понятий, как представление, неприводимость и характер, остаются без изменения. Матричные элементы и характер представления являются теперь непрерывными функциями $T_{ij}^{(\alpha)}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $\chi^{(\alpha)}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ параметров группы. Для непрерывной группы не существует больше конечной таблицы характеров. Поскольку число классов сопряженных элементов непрерывной группы бесконечно, эта таблица и не может быть конечной, а кроме того, подобно самим элементам группы, классы сопряженных элементов распределены непрерывно. Число неэквивалентных неприводимых представлений теперь тоже бесконечно, хотя размерность неприводимых представлений, как правило, конечна [1]).

Бесконечное число неприводимых представлений означает, что разложение произвольной функции по функциям, принадлежащим неприводимым представлениям, может содержать бесконечное число членов. Таким разложением является, например, комплексный ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(im\varphi)$$

для произвольной функции f угла φ, поскольку, как мы убедимся в § 3, каждая функция $\exp(im\varphi)$ преобразуется по одномерному неприводимому представлению группы $\mathcal{R}_2$.

§ 2. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Непрерывная группа размерности r с параметрами $a_1, a_2, \ldots, a_r$ имеет бесконечное число элементов, но почти все свойства группы определяются конечным числом операторов, называемых инфинитезимальными. Для удобства обозначим множество параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$ символом $\mathbf{a}$. Рассмотрим представление $\mathsf{T}(\mathbf{a})$ группы $\mathcal{G}$ в пространстве L. Пусть параметры выбраны таким обра-

[1]) В случае непрерывной компактной группы все неприводимые представления имеют конечную размерность.— *Прим. перев.*

зом, что единичный элемент имеет все параметры $a_q=0$, т. е.

$$\mathsf{T}(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=1. \tag{7.3}$$

Если все параметры a_q малы, то с точностью до членов первого порядка по этим параметрам

$$\mathsf{T}(\mathbf{a}) \approx 1+\sum_{q=1}^{r} a_q \mathsf{X}_q, \tag{7.4}$$

где X_q — некоторые фиксированные линейные операторы, не зависящие от параметров a_q. Эти операторы X_q называются инфинитезимальными операторами представления T, и из равенства (7.4) они определяются как частные производные:

$$\mathsf{X}_q=\lim_{a_q\to 0}\{\mathsf{T}(0,\ 0,\ \ldots,\ a_q,\ \ldots,\ 0)-1\}/a_q=\left[\frac{\partial}{\partial a_q}\mathsf{T}(\mathbf{a})\right]_{\mathbf{a}=0}. \tag{7.5}$$

Вместо того чтобы излагать свойства этих инфинитезимальных операторов в общем случае, рассмотрим сначала частный случай однопараметрической группы $\mathcal{G}$ с законом умножения $\mathsf{G}(c)=\mathsf{G}(a)\mathsf{G}(b)$, где $c=a+b$. Иначе говоря, параметр аддитивен, так же как в группе $\mathcal{R}_2$. Тогда мы можем записать оператор $\mathsf{T}(a)$ в виде $\mathsf{T}(a)=\{\mathsf{T}(a/n)\}^n$, где n — целое число. При больших n параметр a/n мал, и в пределе при $n\to\infty$ нам достаточно сохранить в формуле (7.4) лишь члены нулевого и первого порядка. Тогда, пользуясь определением экспоненциальной функции, получаем

$$\mathsf{T}(a)=\lim_{n\to\infty}\{1+(a/n)\,\mathsf{X}\}^n=\exp\{a\mathsf{X}\}, \tag{7.6}$$

где экспонента определяется как обычный бесконечный ряд: $\exp(a\mathsf{X})=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\mathsf{X}^n/n!$.

Этот пример показывает, каким образом можно построить конечный оператор $\mathsf{T}(a)$ из инфинитезимального оператора X. Таким же путем можно доказать, что в общем случае оператор $\mathsf{T}(\mathbf{a})$ полностью определяется параметрами a_q и инфинитезимальными операторами X_q. Основные свойства инфинитезимальных операторов выражены в трех теоремах, которые мы приведем ниже без до-

казательств. Но сначала мы докажем простое утверждение о том, что если представление T унитарно, то операторы X_q антиэрмитовы, т. е. $\mathsf{X}_q^\dagger = -\mathsf{X}_q$. Оно сразу же следует из равенства (7.4). В самом деле, поскольку параметры a_q действительны, из условия унитарности при малых значениях параметров a_q получаем

$$1 = \mathsf{T}(\mathbf{a})\,\mathsf{T}^\dagger(\mathbf{a}) \approx \left(1 + \sum_q a_q \mathsf{X}_q\right)\left(1 + \sum_q a_q \mathsf{X}_q^\dagger\right) \approx$$
$$\approx \left\{1 + \sum_q a_q (\mathsf{X}_q + \mathsf{X}_q^\dagger)\right\}. \qquad (7.7)$$

Приравнивая член первого порядка нулю, получаем $\mathsf{X}_q^\dagger = -\mathsf{X}_q$. Если разделить операторы X_q на число $i = (-1)^{1/2}$, как это иногда делается, то они станут эрмитовыми.

Теорема 1. Если два представления группы $\mathcal{G}$ имеют одинаковые инфинитезимальные операторы, то эти представления эквивалентны.

Теорема 2. Для любого представления T группы $\mathcal{G}$ множество инфинитезимальных операторов X_q удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$[\mathsf{X}_q, \mathsf{X}_p] = \sum_t c_{qp}^t \mathsf{X}_t, \qquad (7.7)$$

где числовые коэффициенты c_{qp}^t, называемые структурными константами, одинаковы для всех представлений T группы $\mathcal{G}$.

Теорема 3. Любой набор операторов X_q, определенных в пространстве L, образует множество инфинитезимальных операторов представления T группы $\mathcal{G}$ в пространстве L, если операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям (7.7).

Смысл теоремы 1 заключается в том, что представление полностью определяется своими инфинитезимальными операторами. Этот результат является обобщением результата (7.6) для однопараметрической группы.

Вторая теорема дает «закон умножения» для инфинитезимальных операторов. В общем случае инфинитезимальный оператор, соответствующий произведению двух элементов группы, совпадает с суммой инфинитезимальных операторов для сомножителей:

$$\mathsf{T}(\mathbf{a})\,\mathsf{T}(\mathbf{b}) \approx \left(1 + \sum_q a_q \mathsf{X}_q\right)\left(1 + \sum_p b_p \mathsf{X}_p\right) \approx 1 + \sum_q (a_q + b_q)\,\mathsf{X}_q$$

при малых параметрах **a** и **b**. Но в произведении $\mathsf{T}(\mathbf{a})\mathsf{T}(\mathbf{b})\mathsf{T}^{-1}(\mathbf{a})\mathsf{T}^{-1}(\mathbf{b})$ отсутствуют все члены первого порядка, хотя само произведение не является единицей. В самом деле,

$$\mathsf{T}(\mathbf{a})\mathsf{T}(\mathbf{b})\mathsf{T}^{-1}(\mathbf{a})\mathsf{T}^{-1}(\mathbf{b}) \approx 1 + \sum_{q,p} a_q b_p [\mathsf{X}_q, \mathsf{X}_p] + \text{члены порядка} > 2. \quad (7.8)$$

Из групповых свойств следует, что

$$\mathsf{T}(\mathbf{a})\mathsf{T}(\mathbf{b})\mathsf{T}^{-1}(\mathbf{a})\mathsf{T}^{-1}(\mathbf{b}) = \mathsf{T}(\mathbf{c}) \approx 1 + \sum_t c_t \mathsf{X}_t$$

для некоторых параметров **c**. Сравнивая это выражение с предыдущим, заключаем, что параметры **c** должны быть порядка ab, а коммутатор $[\mathsf{X}_q, \mathsf{X}_p]$ должен быть линейной комбинацией операторов X_t. Следовательно, мы приходим к равенству (7.7), согласно которому коммутатор любых двух инфинитезимальных операторов должен быть линейной комбинацией инфинитезимальных операторов. Можно также доказать, что структурные константы c^t_{qp} полностью определяются законом умножения элементов группы, т. е. структурные константы не зависят от выбора представления.

В силу сформулированных теорем исследование непрерывных групп проще исследования конечных групп, поскольку можно рассматривать лишь алгебру инфинитезимальных операторов. Таблица умножения теперь заменяется набором структурных констант.

Из этих теорем следует также, что если подмножество инфинитезимальных операторов некоторой группы $\mathcal{G}$ замкнуто относительно операции коммутирования, т. е. если коммутатор двух элементов подмножества представляется линейной комбинацией элементов этого подмножества, то это подмножество есть множество инфинитезимальных операторов некоторой подгруппы группы $\mathcal{G}$.

Говорят, что набор функций $\varphi_i^{(\alpha)}$ преобразуется по неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(\alpha)}$, если преобразованные функции задаются соотношением (4.37):

$$\mathsf{T}\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_j \mathsf{T}_{ji}^{(\alpha)} \varphi_j^{(\alpha)},$$

где $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ — обычная матрица представления. Для непрерывной группы достаточно показать только, что беско-

нечно малые изменения функций $\varphi_i^{(\alpha)}$ задаются матрицами инфинитезимальных операторов. Так, подставляя $\mathsf{T}=1+\sum_q a_q \mathsf{X}_q$ в условие (4.37), получаем для каждого индекса q

$$\mathsf{X}_q \varphi_i^{(\alpha)} = \sum_j (\mathsf{X}_q)_{ji}^{(\alpha)} \varphi_j^{(\alpha)}, \tag{7.9}$$

где $(\mathsf{X}_q)_{ji}^{(\alpha)}$ — матричные элементы оператора X_q в представлении $\mathsf{T}^{(\alpha)}$. В частности, если функция φ инвариантна, то она преобразуется по тривиальному представлению, для которого $\mathsf{T}=1$. Тогда для всех индексов q инфинитезимальные операторы равны нулю, т. е. $\mathsf{X}_q\varphi=0$.

Аналогично для того, чтобы доказать, что множество операторов $\mathsf{S}_i^{(\alpha)}$ преобразуется по представлению $\mathsf{T}_{(\alpha)}$, мы должны показать, что при любом индексе q бесконечно малое изменение операторов задается теми же самыми известными матрицами. На основании формулы (4.56) при малых параметрах a_q получаем

$$\mathsf{S}' = \mathsf{T}\mathsf{S}\mathsf{T}^{-1} \approx \left(1+\sum_q a_q X_q\right) \mathsf{S} \left(1-\sum_q a_q X_q\right) \approx \mathsf{S} + \sum_q a_q [\mathsf{X}_q, \mathsf{S}].$$

Таким образом, бесконечно малое изменение операторов определяется коммутатором. Следовательно, условие, аналогичное (7.9), записывается для любого индекса q в виде

$$[\mathsf{X}_q, \mathsf{S}_i^{(\alpha)}] = \sum_j (\mathsf{X}_q)_{ji}^{(\alpha)} \mathsf{S}_j^{(\alpha)}. \tag{7.10}$$

Для определения трансформационных свойств функций и операторов обычно гораздо проще пользоваться уравнениями (7.9) и (7.10), чем уравнениями (4.37) и (4.56), которые связаны с конечными преобразованиями. Например, инвариантный оператор S должен удовлетворять уравнению $[\mathsf{X}_q, \mathsf{S}]=0$ при любом индексе q. Иначе говоря, оператор S коммутирует со всеми инфинитезимальными операторами.

Инфинитезимальные операторы для произведения представлений имеют вид суммы инфинитезимальных операторов сомножителей. В случае инфинитезимальных приращений матричный элемент (4.41) приобретает вид

$$\mathsf{T}_{ij,kl}^{(\alpha\times\beta)}(\mathbf{a}) = \left\{\delta_{ik} + \sum_q a_q (\mathsf{X}_q^{(\alpha)})_{ik}\right\} \left\{\delta_{jl} + \sum_p a_p (\mathsf{X}_p^{(\beta)})_{jl}\right\} =$$
$$= \delta_{ik}\delta_{jl} + \sum_q a_q \{(\mathsf{X}_q^{(\alpha)})_{ik}\delta_{jl} + (\mathsf{X}_q^{(\beta)})_{jl}\delta_{ik}\}.$$

Следовательно, в базисе произведений функций $\varphi_k^{(\alpha)}$ и $\psi_l^{(\beta)}$, которые мы рассматривали в гл. 4, § 17, любой инфинитезимальный оператор можно записать в форме

$$\mathsf{X}_q = \mathsf{X}_q(1) + \mathsf{X}_q(2). \tag{7.11}$$

Здесь $\mathsf{X}_q(1)$ — произведение инфинитезимального оператора X_q для $\varphi_k^{(\alpha)}$ на единичный оператор для $\psi_l^{(\beta)}$, а $\mathsf{X}_q(2)$ — произведение единичного оператора для $\varphi_k^{(\alpha)}$ на инфинитезимальный оператор X_q для $\psi_l^{(\beta)}$.

§ 3. ГРУППА $\mathcal{R}_2$

Группа $\mathcal{R}_2$ — это абелева группа, единственный параметр которой, угол вращения a, изменяется в пределах $0 \leqslant a < 2\pi$. Он аддитивен, т. е. если $\mathsf{R}(c) = \mathsf{R}(a)\mathsf{R}(b)$, то $c = a + b$ (или $c = a + b - 2\pi$ при $c \geqslant 2\pi$). Пока мы рассматриваем периодические функции, недоразумений со слагаемыми, кратными 2π, не возникает.

А. Неприводимые представления

В силу абелевости группы $\mathcal{R}_2$ ее неприводимые представления одномерны (гл. 4, § 8). Следовательно, чтобы найти возможные неприводимые представления группы $\mathcal{R}_2$, нужно найти функции $T(a)$, удовлетворяющие соотношениям $T(a+b) = T(a)T(b)$ и $T(0) = 1$. Дифференцируя первое из них по параметру b при фиксированном параметре a, получаем уравнение $T'(a+b) = T(a)T'(b)$, где T' — первая производная функции T. Затем, полагая параметр $b = 0$, получаем уравнение $T'(a) = T(a)T'(0)$. Это простое дифференциальное уравнение для функции $T(a)$ имеет решение $T(a) = \exp[aT'(0)]$, если $T(0) = 1$. Значит, неприводимые представления группы $\mathcal{R}_2$ представляют собой экспоненциальные функции угла вращения a. Коэффициент $T'(0)$ может быть любым, но представление будет непрерывным, т. е. будет удовлетворять равенству $\mathsf{T}(a) = \mathsf{T}(a + 2\pi)$, лишь в случае, когда коэффициент $T'(0)$ есть целое число, умноженное на мнимую единицу. Обычно вводят целое (положительное или отрицательное) число $m = iT'(0)$. Тогда непрерывные неприводимые представления группы $\mathcal{R}_2$ можно записать в виде

$$\mathsf{T}^{(m)}(a) = \exp(-ima). \tag{7.12}$$