Следовательно, в базисе произведений функций $\varphi_k^{(\alpha)}$ и $\psi_l^{(\beta)}$, которые мы рассматривали в гл. 4, § 17, любой инфинитезимальный оператор можно записать в форме

$$\mathsf{X}_q = \mathsf{X}_q(1) + \mathsf{X}_q(2). \tag{7.11}$$

Здесь $\mathsf{X}_q(1)$ — произведение инфинитезимального оператора X_q для $\varphi_k^{(\alpha)}$ на единичный оператор для $\psi_l^{(\beta)}$, а $\mathsf{X}_q(2)$ — произведение единичного оператора для $\varphi_k^{(\alpha)}$ на инфинитезимальный оператор X_q для $\psi_l^{(\beta)}$.

§ 3. ГРУППА $\mathcal{R}_2$

Группа $\mathcal{R}_2$ — это абелева группа, единственный параметр которой, угол вращения a, изменяется в пределах $0 \leqslant a < 2\pi$. Он аддитивен, т. е. если $\mathsf{R}(c) = \mathsf{R}(a)\mathsf{R}(b)$, то $c = a + b$ (или $c = a + b - 2\pi$ при $c \geqslant 2\pi$). Пока мы рассматриваем периодические функции, недоразумений со слагаемыми, кратными 2π, не возникает.

А. Неприводимые представления

В силу абелевости группы $\mathcal{R}_2$ ее неприводимые представления одномерны (гл. 4, § 8). Следовательно, чтобы найти возможные неприводимые представления группы $\mathcal{R}_2$, нужно найти функции $T(a)$, удовлетворяющие соотношениям $T(a+b) = T(a)T(b)$ и $T(0) = 1$. Дифференцируя первое из них по параметру b при фиксированном параметре a, получаем уравнение $T'(a+b) = T(a)T'(b)$, где T' — первая производная функции T. Затем, полагая параметр $b = 0$, получаем уравнение $T'(a) = T(a)T'(0)$. Это простое дифференциальное уравнение для функции $T(a)$ имеет решение $T(a) = \exp[aT'(0)]$, если $T(0) = 1$. Значит, неприводимые представления группы $\mathcal{R}_2$ представляют собой экспоненциальные функции угла вращения a. Коэффициент $T'(0)$ может быть любым, но представление будет непрерывным, т. е. будет удовлетворять равенству $\mathsf{T}(a) = \mathsf{T}(a + 2\pi)$, лишь в случае, когда коэффициент $T'(0)$ есть целое число, умноженное на мнимую единицу. Обычно вводят целое (положительное или отрицательное) число $m = iT'(0)$. Тогда непрерывные неприводимые представления группы $\mathcal{R}_2$ можно записать в виде

$$\mathsf{T}^{(m)}(a) = \exp(-ima). \tag{7.12}$$

Целые числа $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ нумеруют представления. Ясно, что такие представления унитарны. Вектор, преобразующийся по неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(m)}$, обозначается через $\mathbf{e}_m$ и удовлетворяет уравнению $\mathsf{T}(a)\mathbf{e}_m = \exp(-ima)\mathbf{e}_m$.

Заметим, что, рассматривая $m=\pm{}^1/_2, \pm{}^3/_2, \ldots$, можно построить унитарные представления, непрерывные на расширенной области значений $0 \leqslant a < 4\pi$. Эти представления будут двузначны в обычной области значений $0 \leqslant a < 2\pi$. В гл. 8, § 4 мы убедимся, что такие двузначные представления необходимы для описания спина в квантовой механике (см. также § 6).

Б. Характер

В случае одномерных представлений характер совпадает с самим представлением, а поскольку каждый элемент совпадает с классом своих сопряженных элементов, характер равен

$$\chi^{(m)} \equiv T^{(m)}(a) = \exp(-ima), \tag{7.13}$$

т. е. является непрерывной функцией параметра a.

Ортогональность

Соотношение ортогональности характеров, которое в случае конечной группы давалось формулами (4.25), теперь записывается в интегральном виде:

$$\int_{a=0}^{2\pi} \chi^{(m)}\chi^{(m')*}\,da = \int_0^{2\pi} \exp[ia(m'-m)]\,da = 2\pi\delta_{m'm}. \tag{7.14}$$

Такой выбор интеграла взамен суммы по элементам конечной группы очевиден, но мы вернемся к данному вопросу в т. 2, приложение 4, § 3. Весовая функция $\rho(a)$ (в обозначениях § 1) выбрана единичной. «Объем» 2π, который появился в соотношении (7.14), входит вместо числа g элементов группы в соотношении (4.25).

В. Произведение представлений

Характером произведения двух представлений $\mathsf{T}^{(m_1)}$ и $\mathsf{T}^{(m_2)}$ будет просто функция $\exp[-i(m_1+m_2)a]$, которая является характером представления $\mathsf{T}^{(m_1+m_2)}$. Таким образом, мы можем написать довольно очевидную формулу

$$\mathsf{T}^{(m_1)}\otimes\mathsf{T}^{(m_2)}=\mathsf{T}^{(m_1+m_2)}. \tag{7.15}$$

Г. Примеры базисных векторов

1. Рассмотрим единичные векторы $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$, направленные вдоль осей x и y. Пусть $\mathcal{R}_2$ — группа вращений относительно оси z. Тогда, как и в гл. 3, § 8, п. А, получаем

$$\mathsf{R}_z(a)\,\mathbf{e}_x=\cos a\mathbf{e}_x+\sin a\mathbf{e}_y,$$
$$\mathsf{R}_z(a)\,\mathbf{e}_y=-\sin a\mathbf{e}_x+\cos a\mathbf{e}_y,$$

т. е.

$$\mathsf{R}_z(a)\,(\mathbf{e}_x\pm i\mathbf{e}_y)=\exp(\mp ia)\,(\mathbf{e}_x\pm i\mathbf{e}_y). \tag{7.16}$$

Это означает, что вектор $\mathbf{e}_x+i\mathbf{e}_y$ преобразуется по неприводимому представлению с индексом $m=1$, а вектор $\mathbf{e}_x-i\mathbf{e}_y$ преобразуется по неприводимому представлению с индексом $m=-1$. Заметим, что для получения неприводимых представлений пришлось вводить комплексные коэффициенты. На основании геометрических соображений легко убедиться в том, что в xy-плоскости не существует вектора с действительными коэффициентами, который в результате произвольного вращения относительно оси z просто приобретал бы числовой множитель.

2. Далее рассмотрим на xy-плоскости функции $\psi(r,\varphi)$, которые будем считать функциями полярных координат лишь для удобства. Как и в гл. 3, § 8, п. Д, пользуясь общим определением (3.37) индуцированного преобразования функций, получаем

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}_z(a))\,\psi(r,\varphi)=\psi(r,\varphi-a). \tag{7.17}$$

Значит, функция вида $\psi(r,\varphi)=\psi(r)\exp(im\varphi)$ преобразуется по представлению $\mathsf{T}^{(m)}$:

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}_z(a))\exp(im\varphi)=\exp[im(\varphi-a)]=\exp(-ima)\exp(im\varphi).$$

Следовательно, разложение произвольной функции в комплексный ряд Фурье

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(r) \exp(im\varphi),$$

где

$$\psi_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(r, \varphi) \exp(-im\varphi)\, d\varphi,$$

есть разложение ее на компоненты, каждая из которых преобразуется по определенному неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathcal{R}_2$.

Д. Инфинитезимальные операторы

Построим теперь для рассмотренных примеров единственный инфинитезимальный оператор группы $\mathcal{R}_2$. Начнем с того, что матрица оператора $\mathsf{R}_z(a)$ имеет в пространстве векторов $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ вид (гл. 3, § 8, п. А):

$$\mathsf{R}_z(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

При малых углах a эта матрица приблизительно равна

$$1 + \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = 1 + a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для матрицы инфинитезимального оператора получаем выражение

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основании равенства $\mathsf{X}^2 = -1$ можно убедиться в справедливости соотношения (7.6) для этого примера:

$$\begin{aligned} \exp a\mathsf{X} &= 1 + a\mathsf{X} + \frac{1}{2} a^2\mathsf{X}^2 + \frac{1}{6} a^3\mathsf{X}^3 + \frac{1}{24} a^4\mathsf{X}^4 + \ldots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{24} a^4 + \ldots\right) + \mathsf{X}\left(a - \frac{1}{6} a^3 + \ldots\right) = \\ &= \cos a + \mathsf{X} \sin a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} = \mathsf{R}_z(a). \end{aligned}$$

Геометрически очевидно, что преобразование вектора $\mathbf{r}$ на x, y-плоскости при повороте $\mathsf{R}_z(a)$ относительно оси z в первом приближении эквивалентно прибавлению к нему вектора длиной $a|\mathbf{r}|$, направленного перпендикулярно вектору $\mathbf{r}$ (рис. 7.1). Значит, при малых углах a имеем

$$\mathsf{R}_z(a)\,\mathbf{r} \approx \mathbf{r} + a\,(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}), \qquad (7.18)$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный по оси z. Поэтому мы можем написать для оператора R_z выражение

$$\mathsf{R}_z(a) \approx 1 + a\,(\mathbf{e}_z \times .$$

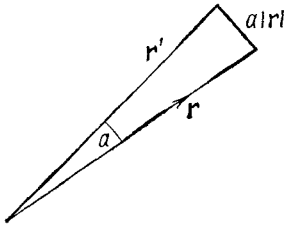

Рис. 7.1.

Следовательно, для примера 1 из п. Гинфинитезимальный оператор равен

$$\mathsf{X} = \mathbf{e}_z \times . \qquad (7.19)$$

Инфинитезимальный оператор на пространстве функций примера 2 можно найти, разложив правую часть равенства (7.17) в ряд Тэйлора:

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}_z(a))\,\psi(r, \varphi) = \psi(r, \varphi) - a\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r, \varphi) + \\ + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi(r, \varphi) + \ldots .$$

При малых углах a этот оператор можно записать в виде $\mathsf{T}(\mathsf{R}_z(a)) \approx 1 - a(\partial/\partial\varphi)$. Значит, в этом примере инфинитезимальным оператором служит дифференциальный оператор

$$\mathsf{X} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad (7.20)$$

В самом деле, ряд Тэйлора представляет собой экспоненциальный ряд для дифференциального оператора $\partial/\partial\varphi$, т. е. $\mathsf{T}(\mathsf{R}_z(a)) = \exp[-a(\partial/\partial\varphi)]$, что снова согласуется с равенством (7.6). Связь с угловым моментом в квантовой механике уже установлена ранее [формула (5.19)]:

$$\mathsf{X} = -\frac{\partial}{\partial\varphi} = -i\,(\mathbf{r}\times\mathbf{p})_z/\hbar = -i\mathsf{l}_z, \qquad (7.21)$$

где l_z — оператор z-компоненты углового момента (в единицах $\hbar$).

Рассматривая второй член разложения выражения (7.12) при малых углах a, убеждаемся в том, что для неприводимого представления $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathcal{R}_2$ матричный элемент инфинитезимального оператора X равен просто $-im$. Действительно, если функция ψ удовлетворяет уравнению $\mathsf{X}\psi=-im\,\psi$, то она должна преобразоваться по неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathcal{R}_2$.

Относительно присоединения к группе $\mathcal{R}_2$ несобственных элементов (отражений и инверсий) см. гл. 9, § 6.

§ 4. ГРУППА $\mathcal{R}_3$

Вращение в трехмерном пространстве обычно обозначают через $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)$, где a — угол поворота ($0\leqslant a\leqslant\pi$), а $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси вращения (гл. 2, § 2, пример 9; гл. 3, § 8). Вращение зависит от трех параметров: угла поворота a и двух сферических углов вектора $\mathbf{k}$. Но в некоторых отношениях проще пользоваться тремя другими параметрами: $a_x=ak_x$, $a_y=ak_y$, $a_z=ak_z$, где k_q — это три составляющие вектора $\mathbf{k}$ в какой-либо фиксированной системе координат. В связи с этим вместо обозначения $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)$ мы введем обозначение $\mathsf{R}(\mathbf{a})$.

Элементарные геометрические рассуждения показывают, что при операции вращения произвольный вектор $\mathbf{r}$ преобразуется в соответствии с равенством

$$\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\mathbf{r}=\cos a\,\mathbf{r}+(1-\cos a)\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k}+\sin a\,(\mathbf{k}\times\mathbf{r}).$$

Отсюда сразу же получаем матрицу преобразования $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)$ в декартовом базисе. Например:

$$[\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)]_{xx}=\cos a+(1-\cos a)\,k_x^2,$$
$$[\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)]_{yx}=(1-\cos a)\,k_xk_y+k_z\sin a \text{ и т. д.}$$

Преобразование вращения сохраняет как длины, так и углы между векторами. Значит, вращение сохраняет скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Следовательно, если мы возьмем векторы $\mathbf{r}_1'=\mathsf{R}\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2'=\mathsf{R}\mathbf{r}_2$, то (гл. 3, § 5) $(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_1')=(\mathsf{R}\mathbf{r}_2,\mathsf{R}\mathbf{r}_1)=(\mathbf{r}_2,\mathsf{R}^\dagger\mathsf{R}\mathbf{r}_1)$, т. е. матрица R унитарна ($\mathsf{R}^\dagger\mathsf{R}=1$) и модуль ее определителя равен единице.

Поскольку в обычном декартовом базисе матричные элементы матрицы R действительны, то сама матрица ортогональна и ее определитель равен ±1. Можно даже,