Рассматривая второй член разложения выражения (7.12) при малых углах a, убеждаемся в том, что для неприводимого представления $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathcal{R}_2$ матричный элемент инфинитезимального оператора X равен просто $-im$. Действительно, если функция ψ удовлетворяет уравнению $\mathsf{X}\psi=-im\,\psi$, то она должна преобразоваться по неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathcal{R}_2$.

Относительно присоединения к группе $\mathcal{R}_2$ несобственных элементов (отражений и инверсий) см. гл. 9, § 6.

§ 4. ГРУППА $\mathcal{R}_3$

Вращение в трехмерном пространстве обычно обозначают через $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)$, где a — угол поворота ($0\leqslant a\leqslant\pi$), а $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси вращения (гл. 2, § 2, пример 9; гл. 3, § 8). Вращение зависит от трех параметров: угла поворота a и двух сферических углов вектора $\mathbf{k}$. Но в некоторых отношениях проще пользоваться тремя другими параметрами: $a_x=ak_x$, $a_y=ak_y$, $a_z=ak_z$, где k_q — это три составляющие вектора $\mathbf{k}$ в какой-либо фиксированной системе координат. В связи с этим вместо обозначения $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)$ мы введем обозначение $\mathsf{R}(\mathbf{a})$.

Элементарные геометрические рассуждения показывают, что при операции вращения произвольный вектор $\mathbf{r}$ преобразуется в соответствии с равенством

$$\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\mathbf{r}=\cos a\,\mathbf{r}+(1-\cos a)\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k}+\sin a\,(\mathbf{k}\times\mathbf{r}).$$

Отсюда сразу же получаем матрицу преобразования $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)$ в декартовом базисе. Например:

$$[\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)]_{xx}=\cos a+(1-\cos a)\,k_x^2,$$
$$[\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)]_{yx}=(1-\cos a)\,k_xk_y+k_z\sin a \text{ и т. д.}$$

Преобразование вращения сохраняет как длины, так и углы между векторами. Значит, вращение сохраняет скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Следовательно, если мы возьмем векторы $\mathbf{r}_1'=\mathsf{R}\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2'=\mathsf{R}\mathbf{r}_2$, то (гл. 3, § 5) $(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_1')=(\mathsf{R}\mathbf{r}_2,\mathsf{R}\mathbf{r}_1)=(\mathbf{r}_2,\mathsf{R}^\dagger\mathsf{R}\mathbf{r}_1)$, т. е. матрица R унитарна ($\mathsf{R}^\dagger\mathsf{R}=1$) и модуль ее определителя равен единице.

Поскольку в обычном декартовом базисе матричные элементы матрицы R действительны, то сама матрица ортогональна и ее определитель равен ±1. Можно даже,

выбрав какой-либо ортонормальный базис, определить вращения как множество ортогональных 3×3-матриц с определителем $+1$. Так как определитель тождественного преобразования равен $+1$, то в силу непрерывности группы $\mathcal{R}_3$ определители всех матриц вращений должны быть равны $+1$. С геометрической точки зрения матрицы с определителем -1 также играют определенную роль. Заметим, что матрица I преобразования инверсии, которое меняет знаки всех векторов, имеет вид

$$\mathsf{I}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

и, следовательно, ее определитель равен -1. Таким образом, ортогональные матрицы с определителем, равным -1, соответствуют произведениям вращений на инверсию. Иногда для обозначения группы $\mathcal{R}_3$ употребляется символ O_3^+, указывающий, что речь идет о группе ортогональных преобразований трехмерного пространства, определитель которых равен $+1$. Символом же O_3 обозначают группу всех ортогональных преобразований, включая инверсии. Группа O_3 совпадает с произведением $\mathcal{R}_3\times S_2$ группы вращений $\mathcal{R}_3$ на группу инверсий S_2. Отметим, что преобразования с определителем, равным -1, сами по себе не образуют группу.

А. Инфинитезимальные операторы

Выражение (7.18) для поворота на малый угол вокруг оси z непосредственно переносится на случай поворота $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)$ на малый угол вокруг произвольной оси $\mathbf{k}$:

$$\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(a)\,\mathbf{r}=\mathbf{r}+a\,(\mathbf{k}\times\mathbf{r})=$$
$$=\mathbf{r}+a\sum_{q=x,\,y,\,z}k_q\,(\mathbf{e}_q\times\mathbf{r})=\mathbf{r}+\sum_q a_q\,(\mathbf{e}_q\times\mathbf{r}),\qquad(7.22)$$

где $a_q=ak_q$. Данное выражение конкретизирует общую формулу для изменения вектора $\mathbf{r}$ (с сохранением членов не выше первого порядка), которая следует из равенства (7.4). Таким образом, три инфинитезимальных оператора, соответствующие параметрам a_q, геометрически представляются как

$$\mathsf{X}_q=(\mathbf{e}_q\times\,.\qquad(7.23)$$

Они соответствуют бесконечно малым поворотам вокруг осей x, y и z. Значит, в базисе $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ матрицы инфинитезимальных операторов имеют вид

$$\mathsf{X}_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathsf{X}_y=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathsf{X}_z=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

На основании элементарных соотношений векторной алгебры можно для любого вектора $\mathbf{r}$ показать, что

$$[\mathsf{X}_x, \mathsf{X}_y]\,\mathbf{r}=\mathbf{e}_x\times(\mathbf{e}_y\times\mathbf{r})-\mathbf{e}_y\times(\mathbf{e}_x\times\mathbf{r})=x\mathbf{e}_y-y\mathbf{e}_x=$$
$$=(\mathbf{e}_z\times\mathbf{r})=\mathsf{X}_z\mathbf{r}.$$

Отсюда получаем перестановочные соотношения для инфинитезимальных операторов группы R_3:

$$[\mathsf{X}_x,\ \mathsf{X}_y]=\mathsf{X}_z,\ [\mathsf{X}_y,\ \mathsf{X}_z]=\mathsf{X}_x,\ [\mathsf{X}_z,\ \mathsf{X}_x]=\mathsf{X}_y. \tag{7.25}$$

В силу уравнения (7.23) три оператора X_q образуют вектор, который при вращениях преобразуется как вектор $\mathbf{e}_q$. Инфинитезимальные операторы группы вращений связаны с операторами углового момента в квантовой механике [формула (7.22)], и, следовательно, эти перестановочные соотношения совпадают с перестановочными соотношениями для трех компонент вектора углового момента, с которыми читатель, возможно, познакомился при изучении квантовой механики. Многие алгебраические выводы данного пункта параграфа имеют соответствующие параллели в теории углового момента; в частности, это относится к анализу структуры неприводимых представлений.

Инфинитезимальные операторы X_q антиэрмитовы (§ 2). Поэтому для удобства можно вынести множитель $i=(-1)^{1/2}$, приняв обозначение $\mathsf{J}_q=i\mathsf{X}_q$. Под инфинитезимальным оператором мы будем понимать как оператор X_q, так и оператор J_q. Надеемся, что это не приведет к какому-либо недоразумению. Операторы J_q эрмитовы и удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[\mathsf{J}_x,\ \mathsf{J}_y]=i\mathsf{J}_z,\ [\mathsf{J}_y,\ \mathsf{J}_z]=i\mathsf{J}_x,\ [\mathsf{J}_z,\ \mathsf{J}_x]=i\mathsf{J}_y. \tag{7.26}$$

Эти соотношения совпадают с перестановочными соотношениями для операторов углового момента, разделенных на число $\hbar$. В § 3 мы доказали, что собственные значения оператора X_z равны $-im$; поэтому собственными значениями оператора J_z будут числа m. В дальнейшем нам будет удобнее вместо самих операторов J_x и J_y рассматривать их линейные комбинации

$$\mathsf{J}_\pm = \mathsf{J}_x \pm i\mathsf{J}_y. \tag{7.27}$$

Преимущество такой замены — в перестановочных соотношениях операторов $\mathsf{J}_\pm$ с оператором J_z:

$$[\mathsf{J}_z, \mathsf{J}_\pm] = i\mathsf{J}_y \pm \mathsf{J}_x = \pm(\mathsf{J}_x \pm i\mathsf{J}_y) = \pm \mathsf{J}_\pm. \tag{7.28}$$

Из этих перестановочных соотношений следует, что если функция $\psi(m)$ есть собственный вектор оператора J_z, принадлежащий представлению $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathcal{R}_2$, то функции $\mathsf{J}_\pm\psi(m)$ принадлежат представлениям $\mathsf{T}^{(m\pm1)}$ и, следовательно, операторы $\mathsf{J}_\pm$ преобразуются по представлениям $\mathsf{T}^{(\pm1)}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{J}_z\{\mathsf{J}_\pm\psi(m)\} &= (\mathsf{J}_\pm\mathsf{J}_z \pm \mathsf{J}_\pm)\,\psi(m) = \mathsf{J}_\pm(\mathsf{J}_z \pm 1)\,\psi(m) = \\ &= \mathsf{J}_\pm(m \pm 1)\,\psi(m) = (m \pm 1)\{\mathsf{J}_\pm\psi(m)\}.\end{aligned} \tag{7.29}$$

Оператор J_+ называется «повышающим», а оператор J_- — «понижающим», так как первый увеличивает, а второй уменьшает собственное значение оператора J_z на единицу. Заметим, что данное свойство является следствием только перестановочных соотношений, а потому оно справедливо для инфинитезимальных операторов в любом представлении группы $\mathcal{R}_3$.

Б. Неприводимые представления

Для группы $\mathcal{R}_2$ нам легко удалось доказать, что неприводимые представления нумеруются целыми числами m и матричный элемент представления равен $\exp(-ima)$. Простота доказательства была следствием абелевости группы $\mathcal{R}_2$ и наличия единственного инфинитезимального оператора. В общем случае группы обладают целым набором инфинитезимальных операторов X_q, а свойства неприводимых представлений определяются перестановочными соотношениями (7.7) для операторов X_q. Для группы $\mathcal{R}_3$ эти соотношения даются равенствами

(7.25) или, что эквивалентно, соотношениями (7.28) и равенством

$$[\mathsf{J}_+, \mathsf{J}_-] = [\mathsf{J}_x + i\mathsf{J}_y,\ \mathsf{J}_x - i\mathsf{J}_y] = 2\mathsf{J}_z. \tag{7.30}$$

В данном пункте параграфа мы постараемся вычислить размерности неприводимых представлений группы $\mathcal{R}_3$ и найти способ нумерации этих представлений. Мы также вычислим матричные элементы инфинитезимальных операторов в каждом неприводимом представлении. Пусть D — неприводимое представление группы $\mathcal{R}_3$ в векторном пространстве L. (Неприводимые представления группы $\mathcal{R}_3$ обычно обозначают буквой D, а не буквой T, которой обозначают представления произвольной группы.) Выберем базис, в котором инфинитезимальный оператор J_z диагонален. Векторы базиса $\mathbf{e}_m$ имеют индекс m, соответствующий собственному значению m оператора J_z, т. е. неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathcal{R}_2$, которому они принадлежат. (Векторы базиса пространства представления $\mathbf{e}_m$, где m — целое число, не нужно путать с тремя единичными векторами $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ в обычном физическом пространстве, которые рассматривались в п. А.)

На данном этапе представляется возможным, что у нескольких линейно-независимых векторов базиса окажутся одинаковые индексы m. Но в дальнейшем мы убедимся, что этого не происходит и одного индекса m достаточно, чтобы различать между собой векторы базиса неприводимого представления. Обозначим через j максимальное значение индекса m для векторов базиса представления D. Пусть $\mathbf{e}_j$ — вектор базиса с индексом $m=j$. Он называется вектором «старшего веса». Вектор $\mathbf{e}_j$ должен удовлетворять условию

$$\mathsf{J}_+\mathbf{e}_j = 0, \tag{7.31}$$

так как иначе новый вектор $\mathsf{J}_+\mathbf{e}_j$ имел бы вес больший, чем вес вектора $\mathbf{e}_j$. Последовательно действуя на вектор $\mathbf{e}_j$ понижающим оператором J_-, построим последовательность нормированных векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{j-1} &= A_{j-1}\mathsf{J}_-\mathbf{e}_j, \\ \mathbf{e}_{j-2} &= A_{j-2}\mathsf{J}_-\mathbf{e}_{j-1}, \\ \mathbf{e}_{j-3} &= A_{j-3}\mathsf{J}_-\mathbf{e}_{j-2} \text{ и т. д.} \end{aligned} \tag{7.32}$$

Коэффициенты A_m, которые еще не вычислены, вводятся для нормировки векторов $\mathbf{e}_m$, причем вектор $\mathbf{e}_j$ считается

нормированным. Все векторы данной последовательности имеют разные индексы m. Поэтому они линейно независимы и взаимно ортогональны. Векторное пространство L должно быть инвариантным относительно групповых преобразований, и, следовательно, все векторы последовательности должны принадлежать пространству L. Если размерность пространства L конечна, то последовательность векторов должна обрываться. Это происходит на том шаге, когда в результате применения понижающего оператора получаем нуль. Иначе говоря, при некотором целом t

$$\mathbf{J}_-\mathbf{e}_{j-t}=0. \tag{7.33}$$

Множество векторов

$$\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_{j-1},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{j-t} \tag{7.34}$$

инвариантно относительно действия операторов $\mathbf{J}_z$ и $\mathbf{J}_-$. Докажем, что оно также инвариантно относительно действия оператора $\mathbf{J}_+$. Тогда это множество векторов будет инвариантным относительно действия любого элемента группы $\mathcal{R}_3$, и, следовательно, оно образует базис некоторого представления группы $\mathcal{R}_3$. Для доказательства инвариантности множества по отношению к действию оператора $\mathbf{J}_+$ построим оператор

$$\mathbf{J}^2=\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}=\mathbf{J}_x^2+\mathbf{J}_y^2+\mathbf{J}_z^2.$$

В силу перестановочных соотношений (7.25) он удовлетворяет соотношениям

$$[\mathbf{J}^2,\ \mathbf{J}_q]=0$$

при $q=x$, y и z. Поэтому, согласно формуле (7.10), этот оператор является инвариантом. Заметим, что оператор $\mathbf{J}^2$ можно выразить через повышающий и понижающий операторы:

$$\mathbf{J}^2=\frac{1}{2}(\mathbf{J}_+\mathbf{J}_-+\mathbf{J}_-\mathbf{J}_+)+\mathbf{J}_z^2.$$

Согласно соотношению (7.30), это выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{J}^2=\mathbf{J}_-\mathbf{J}_++\mathbf{J}_z^2+\mathbf{J}_z, \tag{7.35а}$$

или

$$\mathbf{J}^2=\mathbf{J}_+\mathbf{J}_-+\mathbf{J}_z^2-\mathbf{J}_z. \tag{7.35б}$$

Из соотношения (7.35а) и свойства (7.31) следует, что $\mathbf{e}_j$ — собственный вектор оператора $\mathbf{J}^2$:

$$\mathbf{J}^2\mathbf{e}_j = (\mathbf{J}_-\mathbf{J}_+ + \mathbf{J}_z^2 + \mathbf{J}_z)\,\mathbf{e}_j = j\,(j+1)\,\mathbf{e}_j.$$

Тогда в силу перестановочного соотношения

$$[\mathbf{J}^2,\ \mathbf{J}_-] = 0$$

мы для любого вектора $\mathbf{e}_m$ из последовательности (7.34) получаем

$$\mathbf{J}^2\mathbf{e}_m = j\,(j+1)\,\mathbf{e}_m. \tag{7.36}$$

Теперь из соотношений (7.32) и (7.35б) вытекает инвариантность множества (7.34) относительно действия оператора $\mathbf{J}_+$:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_+\mathbf{e}_m &= A_m\mathbf{J}_+\mathbf{J}_-\mathbf{e}_{m+1} = \\ &= A_m\,(\mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_z^2 + \mathbf{J}_z)\mathbf{e}_{m+1} = \\ &= A_m\,\{j\,(j+1) - (m+1)^2 + (m+1)\}\mathbf{e}_{m+1} = \\ &= A_m\,(j+m+1)\,(j-m)\,\mathbf{e}_{m+1}.\end{aligned} \tag{7.37}$$

Значит, повышающий оператор не дает каких-либо векторов, отличных от векторов последовательности (7.34), которая была получена в результате действия понижающего оператора на вектор $\mathbf{e}_j$. [Тот факт, что оператор J_+ является повышающим, еще не гарантирует правильности данного вывода, поскольку он может перевести вектор $\mathbf{e}_m$ в новый вектор $\mathbf{e}'_{m+1}$, отличный от вектора $\mathbf{e}_{m+1}$ из множества (7.34).] Вектор $\mathbf{e}_j$ должен быть единственным вектором старшего веса среди векторов базиса пространства L, так как иначе представление будет приводимым. Таким образом, неприводимые представления группы $\mathcal{R}_3$ должны обладать базисом, аналогичным последовательности (7.34).

Отметим некоторые свойства неприводимого представления $\mathbf{D}$. На основании равенств (7.35б) и (7.33) получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2\mathbf{e}_{j-t} = (\mathbf{J}_+\mathbf{J}_- + \mathbf{J}_z^2 - \mathbf{J}_z)\,\mathbf{e}_{j-t} &= \{(j-t)^2 - (j-t)\}\,\mathbf{e}_{j-t} = \\ &= (j-t)\,(j-t-1)\,\mathbf{e}_{j-t}.\end{aligned}$$

Сравнивая это равенство с равенством (7.36), находим, что $(j-t)(j-t-1) = j\,(j+1)$, т. е. $(2j-t)(t+1) = 0$. Так как t — положительное целое число, мы имеем $2j = t$ и число j может быть только либо целым, либо полуцелым. Размер-

ность представления D равна теперь $2j+1$. Следовательно, неприводимые представления группы $\mathcal{R}_3$ можно обозначать символом $\mathsf{D}^{(j)}$, где $j=0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, 2$ и т. д., причем размерность этого представления равна $2j+1$, а векторы базиса $\mathbf{e}_m$ можно выбрать так, чтобы они преобразовались по неприводимым представлениям $\mathsf{T}^{(m)}$ подгруппы $\mathcal{R}_2$, где $m=j, j-1, j-2, \ldots, 1-j, -j$. При сужении группы $\mathcal{R}_3$ на ее подгруппу $\mathcal{R}_2$ разложение представления $\mathsf{D}^{(j)}$ можно записать в виде

$$\mathsf{D}^{(j)} = \sum_{m=-j}^{m=j} \mathsf{T}^{(m)}. \tag{7.38}$$

Отметим, что полуцелые представления не периодичны на интервале 2π (§ 3, п. А). Они встречаются лишь при описании спина в квантовой механике (гл. 8, § 4).

Теперь нужно сделать всего один шаг, чтобы вывести матрицы инфинитезимальных операторов J_q в представлении $\mathsf{D}^{(j)}$. Начнем с того, что оператор J_z в базисе векторов $\mathbf{e}_m$ диагонален и его матричные элементы даются равенством

$$\mathsf{J}_z\mathbf{e}_m = m\mathbf{e}_m. \tag{7.39}$$

Матричные элементы операторов J_+ и J_- определяются по формулам (7.32) и (7.37), стоит лишь найти нормировочные множители A_m. Для вычисления этих множителей мы воспользуемся тем, что операторы J_q эрмитовы и поэтому $\mathsf{J}_-^\dagger = \mathsf{J}_+$. Отсюда

$$(\mathbf{e}_m, \mathsf{J}_-\mathbf{e}_{m+1}) = (\mathsf{J}_+\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}) = (\mathbf{e}_{m+1}, \mathsf{J}_+\mathbf{e}_m)^*.$$

Тогда из равенств (7.32) и (7.37) получаем $|A_m|^{-2} = (j+m+1)(j-m)$. Отношения фазовых множителей векторов базиса не определяются ни условием ортогональности, ни нормировкой, и в множители A_m можно ввести любое комплексное число, равное по модулю единице. Обычно множители A_m считают действительными и положительными, так что матричные элементы операторов $\mathsf{J}_\pm$ даются равенствами

$$\begin{aligned} \mathsf{J}_-\mathbf{e}_{m+1} &= [(j+m+1)(j-m)]^{1/2}\mathbf{e}_m, \\ \mathsf{J}_+\mathbf{e}_m &= [(j+m+1)(j-m)]^{1/2}\mathbf{e}_{m+1}. \end{aligned} \tag{7.40}$$

Такой выбор фазовых множителей называется «условием Кондона — Шортли», и отношения фазовых множителей всех $2j+1$ векторов базиса определяются этим условием однозначно.

Можно показать, что множество представлений $\mathsf{D}^{(j)}$ полно, причем в случае однозначной функции можно обойтись лишь целыми числами j:

$$\psi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} \psi_{jm}, \tag{7.41}$$

где j — целое число, а каждый член ψ_{jm} разложения преобразуется, как m-я строка представления $D^{(j)}$.

Построение матриц $D^{(j)}_{m'm}(a_x, a_y, a_z)$ конечных вращений с параметрами a_x, a_y, a_z — это сложная алгебраическая процедура. Мы ее отложим до т. 2, гл. 20, § 5. Матричный элемент $D^{(j)}_{m'm}$ обычно представляется в виде функции трех углов Эйлера, а не параметров a_x, a_y и a_z. Считаем долгом предупредить читателя о том, что разные авторы пользуются разными обозначениями для матриц представлений $\mathsf{D}^{(j)}$. Наши обозначения согласуются с обозначениями книги Бринка и Сэтчлера (см. литературу). В основном они определяются формулами (4.2), (4.8) и (7.40).

B. Характеры

Независимо от направлений осей вращения все повороты на один и тот же угол лежат в одном классе сопряженных элементов группы $\mathcal{R}_3$. Следовательно, характер вращения зависит лишь от угла поворота. Поэтому для вычисления характера неприводимого представления $\mathsf{D}^{(j)}$ мы можем выбрать любую ось вращения. Вращения $\mathsf{R}_z(a)$ вокруг оси z наиболее удобны, так как мы ранее пользовались базисом векторов $\mathbf{e}_m$, которые преобразуются по одномерным неприводимым представлениям $\mathsf{T}^{(m)}$ подгруппы $\mathcal{R}_2$ вращений вокруг оси z. Тогда на основании разложения (7.38) представления $\mathsf{D}^{(j)}$ на неприводимые представления подгруппы $\mathcal{R}_2$ и в силу формулы (7.12) для характеров группы $\mathcal{R}_2$ мы можем вычислить характер

представления $\mathsf{D}^{(j)}$ для поворота на угол a:

$$\chi_a^{(j)} = \sum_{m=-j}^{j} \exp(-ima) = \exp(-ija)[1+\exp(ia)+$$
$$+\exp(2ia)+\ldots+\exp(2jia)] =$$
$$= \exp(-ija)\{\exp[(2j+1)ia]-1\}/[\exp(ia)-1] =$$
$$= \left\{\exp\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)ia\right]-\exp\left[-\left(j+\frac{1}{2}\right)ia\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{\exp\left(\frac{1}{2}ia\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}ia\right)\right\}^{-1} =$$
$$= \frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}. \qquad (7.42)$$

В частности, характер представления с $j=1$, т. е. векторного представления, равен

$$\chi_a^{(1)} = \sin\frac{3}{2}a\Big/\sin\frac{1}{2}a = \cos a + \left(\cos\frac{1}{2}a\sin a\Big/\sin\frac{1}{2}a\right) =$$
$$= \cos a + 2\cos^2\frac{1}{2}a = 2\cos a + 1,$$

что согласуется с равенством (4.6). Единичному элементу соответствует угол вращения $a=0$, при котором характер (7.42) равен $2j+1$, что совпадает с размерностью представления $\mathsf{D}^{(j)}$.

Можно показать (т. 2, приложение 4, §. 3), что соотношение ортогональности характеров группы $\mathcal{R}_2$ содержит в левой части интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{a=0}^{2\pi} \chi_a^{(j_1)}\chi_a^{(j_2)}(1-\cos a)\,da = \delta_{j_1 j_2}.$$

Согласно сказанному в § 4, полная ортогональная группа O_3 — это прямое произведение группы $\mathcal{R}_3$ на группу инверсий S_2. Ее неприводимые представления обозначаются символами $\mathsf{D}^{(j)+}$ и $\mathsf{D}^{(j)-}$. Тогда, согласно изложенному в гл. 4, § 21, получаем, что характеры группы O_3 определяются соотношениями

$$\chi^{(j)\pm}(\mathsf{R}(a)) = \chi^{(j)}(\mathsf{R}(a)),$$
$$\chi^{(j)\pm}(\mathsf{S}(a)) = \chi^{(j)\pm}(\mathsf{R}(a+\pi)I) = \pm\chi^{(j)}(\mathsf{R}(a+\pi)),$$

где $\mathsf{R}(a)$ — собственное вращение, $\mathsf{S}(a)$ — зеркальное вращение (гл. 9, § 1), а $\chi^{(J)}(\mathsf{R}(a))$ — характер, даваемый выражением (7.42).

Г. Произведение представлений

Прямое произведение двух представлений (гл. 4, § 17) будет представлением, которое, вообще говоря, разлагается в сумму неприводимых представлений:

$$\mathsf{D}^{(j_1)} \otimes \mathsf{D}^{(j_2)} = \sum_J c_J \mathsf{D}^{(J)}.$$

Нашей целью в данном пункте параграфа будет вычисление коэффициентов c_J. Так же как для конечных групп, мы рассмотрим соответствующее соотношение для характеров

$$\chi_a^{(j_1)} \chi_a^{(j_2)} = \sum_J c_J \chi_a^{(J)}. \tag{7.43}$$

Для определенности будем считать, что $j_1 \geqslant j_2$. В силу равенства (7.42) левую часть этого уравнения можно записать в виде

$$\frac{\sin\left(j_1+\frac{1}{2}\right)a \sin\left(j_2+\frac{1}{2}\right)a}{\sin^2\frac{1}{2}a} = \frac{-\cos(j_1+j_2+1)a + \cos(j_1-j_2)a}{2\sin^2\frac{1}{2}a} =$$

$$= \frac{2\sin\left(j_1+j_2+\frac{1}{2}\right)a \sin\frac{1}{2}a - \cos(j_1+j_2)a + \cos(j_1-j_2)a}{2\sin^2\frac{1}{2}a} =$$

$$= \frac{\sin\left(j_1+j_2+\frac{1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a} + \frac{\sin(j_1)a \sin(j_2)a}{\sin^2\frac{1}{2}a},$$

или

$$\chi_a^{(j_1)} \chi_a^{(j_2)} = \chi_a^{(j_1+j_2)} + \chi_a^{(j_1-1/2)} \chi_a^{(j_2-1/2)}.$$

Повторяя наши рассуждения, получаем

$$\chi_a^{(j_1)} \chi_a^{(j_2)} = \chi_a^{(j_1+j_2)} + \chi_a^{(j_1+j_2-1)} + \chi_a^{(j_1-1)} \chi_a^{(j_2-1)}$$

и т. д. Вспоминая, что характер тривиального представления $\mathsf{D}^{(0)}$ равен $\chi_a^{(0)}=1$, мы после еще $2j_2-2$ таких шагов

приходим к равенству

$$\chi_a^{(j_1)}\chi_a^{(j_2)}=\chi_a^{(j_1+j_2)}+\chi_a^{(j_1+j_2-1)}+\ldots+\chi_a^{(j_1-j_2)}.$$

Сравнивая этот результат с соотношением (7.43), находим, что при $(j_1-j_2)\leqslant J\leqslant(j_1+j_2)$ коэффициенты $c_J=1$, а при других значениях J коэффициенты $c_J=0$. Ясно, что условие $j_1\geqslant j_2$ не ограничивает общности рассмотрения. Поэтому мы окончательно получаем

$$\mathsf{D}^{(j_1)}\otimes\mathsf{D}^{(j_2)}=\sum_{J=|j_1-j_2|}^{J=(j_1+j_2)}\mathsf{D}^{(J)}. \tag{7.44}$$

Эту формулу можно также вывести путем подсчета числа векторов базиса произведения представлений, которые преобразуются по каждому из представлений $\mathsf{T}^{(M)}$ группы $\mathcal{R}_2$. При этом нужно также воспользоваться тем, что представление $\mathsf{D}^{(J)}$ группы $\mathcal{R}_3$ содержит $2J+1$ векторов, каждому из которых соответствует одно из чисел $M=J, J-1,\ldots$ $\ldots, -J$. Ограничение $|j_1-j_2|\leqslant J\leqslant(j_1+j_2)$ иногда называется условием треугольника из-за его сходства с соотношением между длинами j_1, j_2 и J трех сторон треугольника.

Пользуясь терминологией гл. 4, § 17, группу $\mathcal{R}_3$ можно считать «просто приводимой», так как в разложении (7.44) каждое представление $\mathsf{D}^{(J)}$ встречается не более одного раза. Исходя только из формул (7.40) для матричных элементов инфинитезимальных операторов, можно вывести явное выражение для коэффициентов Клебша — Гордана, введенных в гл. 4, § 17. Но ввиду его сложности мы не приводим его здесь. Выбор фазовых множителей, принятый в соотношениях (7.40), обеспечивает действительность этих коэффициентов. Подробные таблицы значений коэффициентов приведены в книге Ротенберга и др. (см. литературу). Простой способ вычисления этих коэффициентов приводится в задаче 7.8. Подробное описание коэффициентов Клебша — Гордана и связанных с ними коэффициентов можно найти в книге Бринка и Сэтчлера.

Разложение (7.44) приводит к соотношениям между произведениями матричных элементов представлений $\mathsf{D}^{(j)}$. Коэффициенты Клебша — Гордана преобразуют параметризуемые числами m_1, m_2 векторы базиса произведения

представлений в левой части равенства (7.44) в параметризуемые числами JM векторы базиса суммы представлений в правой части равенства (7.44). Значит,

$$\sum_{m_1 m_1' (m_2 m_2')} C(j_1 j_2 J,\ m_1 m_2 M)\, C(j_1 j_2 J',\ m_1' m_2' M')\, D^{(j_1)}_{m_1' m_1} D^{(j_2)}_{m_2' m_2} = \delta_{JJ'} D^{(J)}_{M'M},$$

где все матричные элементы матриц D соответствуют одному и тому же вращению. (Числа m_2, m_2', стоящие в скобках, связаны с числами m_1, m_1' соотношениями $m_1+m_2=M$, $m_1'+m_2'=M'$.) В силу свойства ортогональности коэффициентов данное соотношение можно обратить:

$$D^{(j_1)}_{m_1' m_1} D^{(j_2)}_{m_2' m_2} = \sum_J C(j_1 j_2 J,\ m_1 m_2 M)\, C(j_1 j_2 J,\ m_1' m_2' M')\, D^{(J)}_{M'M}.$$

Эти соотношения не нужно путать с определением представления [формула (4.3)]

$$D^{(j)}_{m'm}(\mathsf{R}(\mathbf{c})) = \sum_n D^{(j)}_{m'n}(\mathsf{R}(\mathbf{a}))\, D^{(j)}_{nm}(\mathsf{R}(\mathbf{b})),$$

где $\mathsf{R}(\mathbf{c})=\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathsf{R}(\mathbf{b})$.

Д. Примеры базисных векторов

В качестве первого примера базиса неприводимого представления $\mathsf{D}^{(j)}$ группы $\mathcal{R}_3$ рассмотрим три единичных вектора $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ в обычном трехмерном пространстве. Они задают базис представления с $j=1$. Очевидно, что трехмерное пространство, порождаемое этими тремя векторами, неприводимо. Таким представлением может быть лишь представление $\mathsf{D}^{(1)}$. Подобное отождествление можно также провести на основании характера $2\cos a+1$. Чтобы записать матрицы операторов в обычной форме, введенной в предыдущем пункте параграфа, выберем в качестве векторов базиса $\mathbf{e}_m$ следующие линейные комбинации векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/2^{1/2}, \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_{-1} &= (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)/2^{1/2}. \end{aligned} \tag{7.45}$$

Нетрудно показать, что векторы $\mathbf{e}_m$ преобразуются по представлениям $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathcal{R}_2$ вращений вокруг оси z

[формула (7.13)]. Если отношения фазовых множителей выбрать в соответствии с условиями Кондона — Шортли [формула (7.40)], то, как мы убедимся ниже, три вектора $\mathbf{e}_m$ будут ортонормальны относительно скалярного произведения (3.7). Из равенств (7.23) непосредственно следуют соотношения

$$\begin{aligned} &\mathsf{X}_x\mathbf{e}_x=0, && \mathsf{X}_x\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_z, && \mathsf{X}_x\mathbf{e}_z=-\mathbf{e}_y,\\ &\mathsf{X}_y\mathbf{e}_x=-\mathbf{e}_z, && \mathsf{X}_y\mathbf{e}_y=0, && \mathsf{X}_y\mathbf{e}_z=\mathbf{e}_x,\\ &\mathsf{X}_z\mathbf{e}_x=\mathbf{e}_y, && \mathsf{X}_z\mathbf{e}_y=-\mathbf{e}_x, && \mathsf{X}_z\mathbf{e}_z=0. \end{aligned}$$

Путем замены $\mathsf{J}_q=i\mathsf{X}_q$ получаем

$$\begin{aligned} &\mathsf{J}_z\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1, && \mathsf{J}_z\mathbf{e}_0=0, && \mathsf{J}_z\mathbf{e}_{-1}=-\mathbf{e}_{-1},\\ &\mathsf{J}_+\mathbf{e}_1=0, && \mathsf{J}_+\mathbf{e}_0=2^{1/2}\mathbf{e}_1, && \mathsf{J}_+\mathbf{e}_{-1}=2^{1/2}\mathbf{e}_0,\\ &\mathsf{J}_-\mathbf{e}_1=2^{1/2}\mathbf{e}_0, && \mathsf{J}_-\mathbf{e}_0=2^{1/2}\mathbf{e}_{-1}, && \mathsf{J}_-\mathbf{e}_{-1}=0. \end{aligned}$$

Поэтому в базисе векторов $\mathbf{e}_m$ матрицы операторов J_q имеют следующий вид:

$$\mathsf{J}_z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \mathsf{J}_+=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathsf{J}_-=\begin{pmatrix}0&0&0\\\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}. \tag{7.46}$$

Это согласуется с соотношениями (7.40) при $j=1$.

В качестве второго примера рассмотрим шестимерное пространство всех однородных квадратичных функций, введенное в гл. 3, § 2, п. Г. Оно инвариантно относительно любых поворотов, так как при вращении степень однородного полинома не меняется. Функция $x^2+y^2+z^2$ инвариантна. Значит, она порождает представление $\mathsf{D}^{(0)}$. Оставшиеся пять функций образуют базис представления $\mathsf{D}^{(2)}$. Это можно показать, вычислив характер представления или прямо построив эти функции, как это делается ниже.

Взяв выражение (7.21) для оператора X_z и проделав в нем циклическую перестановку индексов для двух других операторов, мы получим явные дифференциальные

выражения для инфинитезимальных операторов

$$J_z = i\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$J_y = i\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right),$$
$$J_x = i\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Затем построим повышающий и понижающий операторы

$$J_+ = J_x + iJ_y = z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) - (x+iy)\frac{\partial}{\partial z},$$
$$J_- = J_x - iJ_y = -z\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + (x-iy)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Из тождества

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy) = 0 \tag{7.47}$$

следует, что функция

$$\psi_2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + 2ixy = r^2\exp(2i\varphi)$$

отвечает старшему весу $m=2$, так как $J_+\psi_2=0$ и $J_z\psi_2=2\psi_2$. Последовательно применяя понижающий оператор, построим функции

$$\psi_1 = \frac{1}{2}J_-\psi_2 = -2z(x+iy),$$
$$\psi_0 = \left(\frac{1}{6}\right)^{1/2}J_-\psi_1 = -\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}(x^2+y^2-2z^2),$$
$$\psi_{-1} = 2z(x-iy),$$
$$\psi_{-2} = (x-iy)^2.$$

Нормировочные множители мы взяли из равенств (7.40). Пять этих функций линейно-независимы. Вместе с инвариантной функцией $x^2+y^2+z^2$ они порождают шестимерное пространство квадратичных функций. Каждая функция ψ_m пропорциональна сферической функции $Y_m^{(l)}(\theta, \varphi)$ с $l=2$:

$$\psi_m = (32\pi/15)^{1/2}r^2Y_m^{(2)}(\theta, \varphi).$$

Сферические функции удобнее всего определять именно таким способом. При других значениях l обычно начинают с функции $(x+iy)^l$, которая, согласно формуле (7.47), отвечает старшему весу. Затем последовательно приме-

няют понижающий оператор. Тогда при правильном выборе нормировочных и фазовых множителей получаются функции

$$Y_m^{(l)} = (-1)^m \left\{ \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right\}^{1/2} \exp(im\varphi) \sin^m\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta} \right)^{l+m} \times \times (\cos^2\theta - 1)^l / 2^l l! \quad (7.48)$$

для положительных чисел m, а также соотношение $Y^l_{-m} = (-1)^m Y_m^{(l)*}$. В частности, $Y_0^{(l)} = [(2l+1)/4\pi]^{1/2} P_l(\cos\theta)$, где P_l — полином Лежандра. Как мы покажем в § 5, сферические функции обладают тем свойством, что произведения $\psi(\mathbf{r}) = r^l Y_m^{(l)}(\theta, \varphi)$ являются решениями уравнения Лапласа $\nabla^2\psi = 0$ при любом целом числе l. Это свойство часто рассматривают как определение сферических функций.

Преобразование сферических функций при вращении полезно записать в явном виде. Если θ, φ — угловые координаты вектора $\mathbf{r}$, а θ', φ' — угловые координаты вектора $\mathsf{R}^{-1}r$, то на основании общих определений (4.2) и (4.8) для преобразования функций получаем

$$\mathsf{D}(R) Y_m^{(l)}(\theta, \varphi) = Y_m^{(l)}(\theta', \varphi') = \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)}(\mathsf{R}) Y_{m'}^{(l)}(\theta, \varphi).$$

Таким образом, сферическая функция, аргументами которой являются преобразованные координаты θ', φ', представляется в виде суммы сферических функций первоначальных координат. Обратное преобразование вращения дается в виде

$$Y_m^{(l)}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)}(\mathsf{R}^{-1}) Y_{m'}^{(l)}(\theta', \varphi') = = \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)*}(\mathsf{R}) Y_{m'}^{(l)}(\theta', \varphi'),$$

так как матрица представления унитарна. Координаты θ', φ' можно считать координатами точки $\mathbf{r}$ в новой системе координат, которая получается из первоначальной действием оператора вращения R.

В качестве примера разложения (7.41) функции на ее неприводимые компоненты укажем разложение однозначной функции, зависящей от положения одной частицы,

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm}(r) Y_m^{(l)}(\theta, \varphi). \quad (7.49)$$

Ортогональность сферических функций вытекает из общей формулы (4.38), поскольку индекс l соответствует неприводимому представлению группы $\mathcal{R}_3$, а индекс m — неприводимому представлению группы $\mathcal{R}_2$, т. е.

$$\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} Y_{m'}^{(l')*}(\theta, \varphi)\, Y_m^{(l)}(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{l'l}\delta_{m'm}. \quad (7.50)$$

Нормировочный множитель в определении функции $Y_m^{(l)}$ подобран в соответствии с этим равенством. Изложенный выше способ построения функций $Y_m^{(l)}$ гарантирует нам, что отношения фазовых множителей функций $Y_m^{(l)}$ при фиксированном числе l и различных индексах m согласованы с условиями (7.40).

Е. Неприводимые семейства операторов и теорема Вигнера — Эккарта

В силу общего определения гл. 4, § 20 неприводимое относительно группы $\mathcal{R}_3$ семейство операторов — это множество операторов $\mathsf{S}_p^{(k)}$ с фиксированными индексами $k=0, {}^1/_2, 1, \ldots$ и индексами $p=k, k-1, \ldots, -k$, причем эти операторы преобразуются по неприводимому представлению $\mathsf{D}^{(k)}$. Число k называется степенью или рангом семейства. Мы убедились в § 2, что операторы из такого семейства должны удовлетворять следующим перестановочным соотношениям с инфинитезимальными операторами J_q группы $\mathcal{R}_3$:

$$[\mathsf{J}_q, \mathsf{S}_p^{(k)}] = \sum_r (\mathsf{J}_q)_{rp}^{(k)} \mathsf{S}_r^{(k)}, \quad (7.51)$$

где $(\mathsf{J}_q)_{rp}^{(k)}$ — матричные элементы оператора J_q в представлении $\mathsf{D}^{(k)}$. Если матричные элементы из равенств (7.39) и (7.40) подставить в эти соотношения, определяющие неприводимое семейство операторов, то получим

$$\begin{aligned} &[\mathsf{J}_z, \mathsf{S}_p^{(k)}] = p\mathsf{S}_p^{(k)}, \\ &[\mathsf{J}_\pm, \mathsf{S}_p^{(k)}] = \{(k \pm p + 1)(k \mp p)\}^{1/2} \mathsf{S}_{p\pm 1}^{(k)}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Иногда для неприводимого семейства операторов пользуются введенным Рака термином «тензор-оператор». Неприводимые семейства операторов можно перемножать и затем разлагать вновь на неприводимые семейства с помощью коэффициентов Клебша — Гордана (п. Г).

Мы уже отмечали в гл. 3, § 8, п. В, что умножение на функцию можно рассматривать как оператор на пространстве функций. В этом смысле сферические функции $Y_p^{(k)}$ образуют неприводимое семейство при $p=k, k-1, \ldots, -k$.

Сравнивая перестановочные соотношения (7.28) и (7.30) с соотношениями (7.52), мы видим, что сами инфинитезимальные операторы образуют неприводимое семейство с $k=1$. Оно называется «вектор-оператором». В самом деле, как нетрудно убедиться, неприводимое семейство

$$\mathsf{J}_1^{(1)} = -\mathsf{J}_+/2^{1/2}, \quad \mathsf{J}_0^{(1)} = \mathsf{J}_z, \quad \mathsf{J}_{-1}^{(1)} = \mathsf{J}_-/2^{1/2}$$

удовлетворяет обычным соотношениям (7.52), в которые включено условие Кондона — Шортли для фазовых множителей. Соотношения (7.52) не определяют операторы абсолютно. Поэтому мы произвольно положили $\mathsf{J}_0^{(1)} = \mathsf{J}_z$. После этого знаки и величины операторов $\mathsf{J}_{\pm 1}^{(1)}$ определяются равенствами (7.52). Операторы $\mathsf{J}_m^{(1)}$ иногда называют «сферическими» компонентами оператора $\mathbf{J}$. Они аналогичны векторам базиса $\mathbf{e}_m$, введенным в п. Д.

Согласно теореме Вигнера — Эккарта [формула (4.62)], матричные элементы операторов из неприводимого семейства связаны между собой. Группа $\mathcal{R}_3$ просто приводима. Поэтому индекс t в формуле (4.62) не нужен. Так как обычные коэффициенты Клебша — Гордана группы $\mathcal{R}_3$ действительны, теорему принято записывать в виде

$$\langle jm \,|\, \mathsf{S}_q^{(k)} \,|\, j'm' \rangle = C\,(j'kj,\ m'qm)\,(-1)^{2k} \langle j \,\|\, \mathsf{S}^{(k)} \,\|\, j' \rangle. \qquad (7.53)$$

[Данное соотношение отличается от соотношения (4.62) тем, что в нем изменен порядок некоторых индексов коэффициента C, а также введен множитель $(-1)^{2k}$. Эти изменения незначительны и равносильны другому определению приведенного матричного элемента, которое лишь немного отличается от исходного. Мы пользовались обозначениями книги Бринка и Сэтчлера (см. литературу). Они отличаются от обозначений, первоначально введенных Рака.]

Ж. Эквивалентные операторы

Чтобы пользоваться теоремой Вигнера — Эккарта [формула (7.53)] при решении практических задач, нужно знать коэффициенты векторного сложения (коэффициенты

Клебша — Гордана). Для этих коэффициентов имеются аналитические выражения, таблицы и вычислительные программы. Но в некоторых простых случаях так называемый метод эквивалентного оператора позволяет обойтись без этих коэффициентов. Сущность метода заключается в двукратном применении теоремы Вигнера — Эккарта. Один раз теорема применяется к интересующему нас оператору, а второй — к эквивалентному оператору, который так же преобразуется при вращениях, но который легко вычислить. В отношении матричных элементов двух операторов коэффициент векторного сложения сокращается. При другом подходе эквивалентным оператором пользуются для вычисления коэффициента векторного сложения.

В качестве примера рассмотрим вектор-оператор V_q, т. е. семейство из трех операторов, которые преобразуются по неприводимому представлению $\mathsf{D}^{(1)}$. Вектор углового момента J_q тоже является вектор-оператором. Тогда, согласно теореме Вигнера — Эккарта [формула (7.53)], получаем

$$\langle JM\,|\,\mathsf{V}_q\,|\,JM'\rangle = C\,(J1J,\ M'qM)\,\langle J\,\|\,\mathbf{V}\,\|\,J\rangle,$$
$$\langle JM\,|\,\mathsf{J}_q\,|\,JM'\rangle = C\,(J1J,\ M'qM)\,\langle J\,\|\,\mathbf{J}\,\|\,J\rangle.$$

Значит,

$$\langle JM\,|\,\mathsf{V}_q\,|\,JM'\rangle = \langle JM\,|\,\mathsf{J}_q\,|\,JM'\rangle\,\frac{\langle J\,\|\,\mathbf{V}\,\|\,J\rangle}{\langle J\,\|\,\mathbf{J}\,\|\,J\rangle}, \qquad (7.54)$$

т. е. матричный элемент оператора V_q зависит от чисел M, M' и q так же, как матричный элемент оператора J_q, который определяется равенствами (7.39) и (7.40). От конкретного вида оператора V_q зависит лишь коэффициент пропорциональности. Такой способ применим к любой группе. Как и в разобранном примере, эквивалентный оператор обычно строится из инфинитезимальных операторов группы.

Метод эквивалентного оператора, как правило, непригоден для вычисления матричных элементов между функциями из разных представлений. В примере (7.54) матричные элементы эквивалентного оператора между векторами из представлений с числами J и $J'\neq J$ должны быть равны нулю, хотя для произвольного вектор-оператора, такого, как вектор положения $\mathbf{r}$, эти матричные элементы, вообще говоря, отличны от нуля.