Для перечисления неприводимых представлений групп, больших, чем группа $\mathcal{R}_3$, приходится вводить несколько чисел, подобных числу j. Число таких чисел называется рангом группы. Рассматривая кубические и более высокие степени операторов X_q, можно построить множество операторов Казимира данной группы. Все числа, нумерующие представления, связаны с собственными значениями операторов Казимира.

§ 6. ДВУЗНАЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В случае конечных групп представление $T(G_a)$ каждому элементу группы G_a сопоставляет единственный оператор $T(G_a)$. В случае непрерывных групп представление $T(\mathbf{a})$ есть непрерывная функция параметров группы $\mathbf{a}$. Поскольку существуют многозначные функции, возможны и многозначные представления непрерывных групп. Например, если в представлении $T^{(m)}(a)=\exp(-ima)$ группы $\mathcal{R}_2$, рассмотренном в § 3, п. А, выбрать $m={}^1/_2$, то мы получим $T^{1/2}(0)=1$ и $T^{1/2}(2\pi)=-1$. Но поворот на угол 2π — это тот же элемент группы $\mathcal{R}_2$, что и поворот на нулевой угол. Значит, наше двузначное представление сопоставляет этому элементу как $+1$, так и -1. Выбирая $m={}^1/_3$, получаем трехзначное представление. Аналогично из формулы (7.42) для характера представления $D^{(j)}$ группы $\mathcal{R}_3$ следует, что это представление однозначно, если j — целое число, и двузначно, если j — полуцелое число.

Среди решений уравнения Шредингера нет решений, соответствующих двузначным представлениям (§ 5), но с физической точки зрения такие представления в общем не исключаются в квантовой механике. В самом деле, представление $D^{(1/2)}$ группы $\mathcal{R}_3$ необходимо для описания спина, т. е. внутреннего углового момента электрона (гл. 8, § 4). Обратимся на некоторое время к квантовой механике. Допустим, что состояние $T(\mathbf{a})\psi$ представляет функцию ψ системы, преобразованную в соответствии с элементом группы $G(\mathbf{a})$. Тогда, если $G(\mathbf{a})G(\mathbf{b})=G(\mathbf{c})$, то система, преобразованная в соответствии с элементом группы $G(\mathbf{c})$, должна представляться как состоянием $T(\mathbf{c})\psi$, так и состоянием $T(\mathbf{a})T(\mathbf{b})\psi$. Фазовый множитель состояния не имеет физического смысла. Поэтому $T(\mathbf{a})T(\mathbf{b})=\omega(\mathbf{a},\ \mathbf{b})\,T(\mathbf{c})$, где ω — некоторый фазовый

множитель. Это более общее соотношение, нежели наше первоначальное определение представления [формула (4.1)]. Оно справедливо и для многозначных представлений, для которых не выполняется условие (4.1). Заметим, что определение (4.8) операторов представления $\mathsf{T}(\mathbf{a})$ на пространстве однозначных функций приводит к фазовому множителю $\omega=1$ и, следовательно, исключает многозначные представления.

Удобный математический способ описания многозначных представлений состоит в расширении группы путем добавления новых элементов. Тогда многозначные представления становятся однозначными представлениями расширенной группы. (Такая расширенная группа называется «универсальной накрывающей группой».) В случае двузначных представлений группы $\mathcal{R}_3$ расширенную группу (ее часто называют «удвоенной группой») можно определить следующим образом. Обозначим символом $\bar{\mathsf{E}}$ поворот на угол 2π. Этот оператор не совпадает с тождественным преобразованием E, но $\bar{\mathsf{E}}^2=\mathsf{E}$. Из соотношения (2.12) следует, что $\bar{\mathsf{E}}\mathsf{R}(\mathbf{a})\bar{\mathsf{E}}=\mathsf{R}(\mathbf{a})$, т. е. преобразование $\bar{\mathsf{E}}$ коммутирует с любым преобразованием поворота. Значит, $\mathsf{R}(\mathbf{a})\bar{\mathsf{E}}\mathsf{R}(\mathbf{a})^{-1}=\bar{\mathsf{E}}$ и новый элемент $\bar{\mathsf{E}}$ соответствует повороту на угол 2π вокруг *любой* оси. Расширенная группа строится путем включения новых элементов $\bar{\mathsf{E}}\mathsf{R}(\mathbf{a})$ наряду с первоначальными элементами $\mathsf{R}(\mathbf{a})$, для которых $|\mathbf{a}|\leqslant\pi$. При умножении двух элементов группы новый элемент $\bar{\mathsf{E}}$ появляется в тех случаях, когда полный угол поворота превышает 2π. Такой геометрический способ описания удвоенной группы может показаться довольно туманным. Но, отождествив удвоенную группу с группой унитарных преобразований двумерного пространства, этому способу можно дать строгое алгебраическое обоснование (т. 2, гл. 18, § 13). (Введение удвоенной группы для исключения двузначных представлений имеет аналогию в теории функций комплексного переменного, где двузначная функция типа функции $z^{1/2}$ рассматривается как однозначная функция на двулистной римановой поверхности.)

То, что группа $\mathcal{R}_3$ имеет лишь однозначные и двузначные представления, тогда как группа $\mathcal{R}_2$ имеет n-значные

представления, причем n — любое целое число, можно было бы сказать заранее, тщательно проанализировав соотношение между множеством параметров и элементами группы. Мы лишь кратко рассмотрим этот вопрос, относящийся к так называемому свойству односвязности группы. У нас имеются три объекта: параметры группы $\mathbf{a}$, элемент группы $\mathsf{G}(\mathbf{a})$ и функция представления $T(\mathbf{a})$. Последовательное умножение бесконечно малых элементов группы соответствует некоторому пути в пространстве параметров $\mathbf{a}$. Предположим, что все пути, ведущие из единицы группы в какую-либо произвольную точку $\mathbf{a}$, можно получать один из другого за счет непрерывной деформации. Тогда представление $\mathsf{T}(\mathbf{a})$ должно быть однозначным, так как у многозначной функции имеются скачки в значениях. Рассмотрим сначала группу $\mathcal{R}_2$. Ее единственный параметр a изменяется в интервале $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, причем оба конца интервала соответствуют единице группы. Наряду с прямым путем из точки 0 в точку a существуют пути, которые сначала достигают точки 2π и затем возобновляются в точке 0 (рис. 7.2). С точки зрения элементов группы такие пути непрерывны. В одномерном пространстве параметров невозможна какая-либо деформация путей. Поэтому пути вида I, II, III и т. д. нельзя деформировать один в другой. Существование таких различных путей приводит к появлению многозначных представлений. Пространство параметров группы $\mathcal{R}_3$ представляет собой шар радиусом π (§ 4), причем противоположные концы любого диаметра этого шара соответствуют одинаковым вращениям, т. е. $\mathsf{R}_{\mathbf{k}}(\pi) = \mathsf{R}_{-\mathbf{k}}(\pi)$ для любого вектора $\mathbf{k}$. Путь из единицы группы, т. е. из начала координат $\mathbf{a}=0$, либо прямо ведет в заданную точку $\mathbf{a}$ (I на рис. 7.3), либо сначала доходит до граничной сферы, а затем возобновляется на противоположном конце диаметра (II на рис. 7.3). Интересным отличием группы $\mathcal{R}_3$

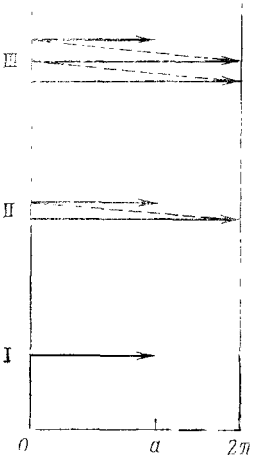

Рис. 7.2.

от группы $\mathcal{R}_2$ является то, что в группе $\mathcal{R}_3$ любой путь, который четное число раз подходит к граничной сфере, можно непрерывно деформировать в путь, который прямо ведет в конечную точку. Путь же, который подходит к граничной сфере нечетное число раз, можно также деформировать в путь, который подходит к граничной сфере лишь

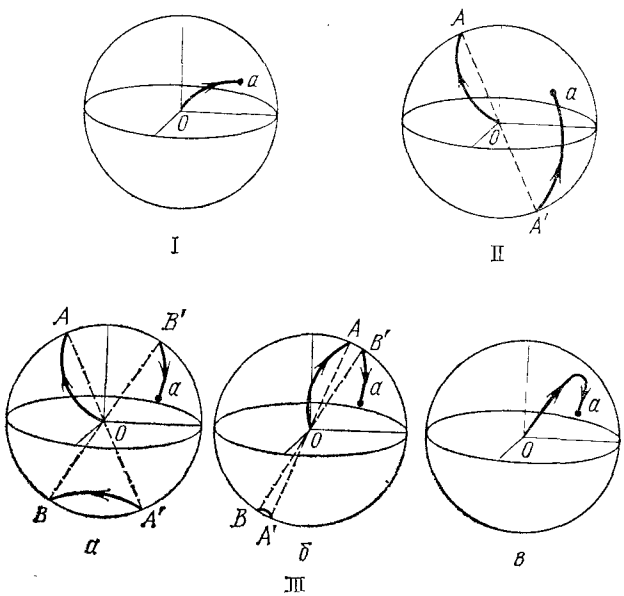

Рис. 7.3.

однажды (II на рис. 7.3). Поэтому для группы $\mathcal{R}_3$ возможны лишь однозначные и двузначные представления. Для пути, дважды подходящего к граничной сфере, на рис. 7.3, III показана последовательная деформация от положения *а* к положению *б*, а затем к положению *в*. При этом диаметр AA' поворачивается до тех пор, пока точка A не достигнет точки B'.

§ 7. КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В общем случае, если T — матричное представление группы, то матричным представлением будет также множество комплексно-сопряженных матриц T^*. Для группы