$\mathcal{R}_3$ представление $\mathsf{D}^{(j)*}$ имеет тот же характер, что и представление $\mathsf{D}^{(j)}$, так как характер (7.42) — действительная функция. Следовательно, эти представления эквивалентны. Найдем пребразование, связывающее эти представления. Прежде всего заметим, что матрицы (7.39) и (7.40) операторов J_z и $\mathsf{J}_\pm$ действительны. Значит, матрицы операторов J_z и J_x действительны, а матрица оператора J_y — чисто мнимая. Поэтому при переходе от представления $\mathsf{D}^{(j)}$ к представлению $\mathsf{D}^{(j)*}$ из-за множителя i в определении оператора J_q (§ 4, п. А) знак операторов J_z и J_x должен меняться, а оператор J_y остается неизменным. Иначе говоря, $\mathsf{J}_z \to -\mathsf{J}_z$ и $\mathsf{J}_\pm \to -\mathsf{J}_\mp$. Из формул (7.39) и (7.40) видно, что такое преобразование получается при замене базиса $\mathbf{e}_m$ базисом $(-1)^{j-m}\,\mathbf{e}_{-m}$. Фазовый множитель нужен для того, чтобы изменить знак повышающего и понижающего операторов.) Таким образом, матричные элементы представления $\mathsf{D}^{(j)*}$ имеют вид

$$D^{(j)*}_{m'm} = (-1)^{m-m'} D^{(j)}_{-m'-m}.$$

Такое преобразование векторов базиса можно также осуществить с помощью матрицы $\mathsf{D}^{(j)}(\mathsf{R}_y(\pi))$, соответствующей повороту на угол π вокруг оси y, так как при таком вращении меняется на обратное направление осей x и z.

ЛИТЕРАТУРА

Последовательное изложение теории групп Ли можно найти в книге Бёрнера, 1963 (см. литературу к гл. 4) и в книге

Gilmor R., Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Applications, Wiley, New York, 1974.

Теория углового момента, а также коэффициенты векторного сложения для группы $\mathcal{R}_3$ подробно разобраны в книгах

Brink D. M., *Satchler G. R.*, Angular Momentum, Clarendon Press, Oxford, 1968.

Юцис А. П., *Бандзайтис А. А.* Теория момента количества движения в квантовой механике.— Вильнюс: Москлас, 1977[1]).

Таблицы коэффициентов векторного сложения для группы $\mathcal{R}_3$ приведены в книге

Rotenberg M., *Bivins R.*, *Metropolis N.*, *Wooten J. K.*, The 3-j and 6-j Symbols, Technology Press, M. I. T., Cambridge, Mass., 1959.

Следующий сборник содержит среди других работ оригинальные статьи Рака, в которых впервые введены алгебраические соотношения для углового момента:

---

[1]) Добавлено при переводе.— *Прим. ред.*

Biedenharn L. C., van Dam H., Quantum Theory of Angular Momentum, Academic Press, New York, 1965.

Оператор Казимира описан в работе

Racah G., Rend. Accad. Lincei, 1950, v. 8, p. 108.

ЗАДАЧИ

7.1. На основании примера 2 из § 3, п. Г докажите, что функции $x \pm iy$ преобразуются по представлениям $\mathsf{T}^{(\pm 1)}$ группы $\mathcal{R}_2$. Классифицируйте шесть квадратичных функций переменных x, y и z в соответствии с их трансформационными свойствами по отношению к группе $\mathcal{R}_2$.

7.2. Объясните, почему несобственные вращения (с определителем, равным -1), взятые сами по себе, не образуют группу.

7.3. Введя декартовы координаты, запишите инфинитезимальный оператор (7.20) вращений вокруг оси z в виде $\mathsf{X}_z = y(\partial/\partial x) - x(\partial/\partial y)$. Рассматривая соответствующие выражения для инфинитезимальных операторов вращений вокруг двух других осей, проверьте перестановочные соотношения (7.25).

7.4. Покажите, что $[\mathsf{J}_+, \mathsf{J}_-] = 2\mathsf{J}_z$ и $[\mathbf{J}^2, \mathsf{J}_q] = 0$. [Нужно воспользоваться соотношениями (7.26.]

7.5. С помощью равенств (7.40) постройте матрицы операторов J_x, J_y и J_z при $j = 1/2$ (матрицы Паули), а также соответствующие матрицы при $j = 1$ [формула (8.15)].

7.6. Найдите характер представления $\mathsf{D}^{(2)}$ группы $\mathcal{R}_3$ для вращений, принадлежащих подгруппе D_3. На основании таблицы характеров (табл. 4.2) найдите представления группы D_3, которые получаются при разложении ограничения представления $\mathsf{D}^{(2)}$ на подгруппу D_3.

7.7. Согласно равенству (7.44), произведение представлений $\mathsf{D}^{(1/2)} \otimes \mathsf{D}^{(1/2)}$ содержит представление $\mathsf{D}^{(1)}$. В обозначениях формулы (4.46) очевидно равенство $\Psi_1^{(1)} = \varphi_{1/2}^{(1/2)} \psi_{1/2}^{(1/2)}$, поскольку имеется только одна функция с $m = 1$. Действуя на $\Psi_1^{(1)}$ [формула (7.40)] понижающим оператором [формула (7.11)] $\mathsf{J}_- = \mathsf{J}_-(1) + \mathsf{J}_-(2)$, где $\mathsf{J}_-(1)$ — оператор, действующий на функцию φ, а $\mathsf{J}_-(2)$ — на функцию ψ, постройте вектор $\Psi_0^{(1)}$ и затем найдите коэффициенты Клебша — Гордана $C(1/2\ 1/2\ 1, \ 1/2 - 1/2\ 0)$ и $C(1/2\ 1/2\ 1, \ -1/2\ 1/2\ 0)$ [в обозначениях формулы (4.46)].

7.8. Вычислите коэффициенты Клебша — Гордана, выделяющие из произведения представлений $\mathsf{D}^{(1)} \otimes \mathsf{D}^{(2)}$ вектор с $j = 1$, $m = 0$. Вычисления нужно проводить в такой последовательности: I. Записать вектор $\Psi_1^{(1)}$ в виде $\Psi_1^{(1)} = \alpha\varphi_1^{(1)}\psi_0^{(2)} + \beta\varphi_0^{(1)}\psi_1^{(2)} + \gamma\varphi_{-1}^{(1)}\psi_2^{(2)}$ и с помощью условия $\mathsf{J}_+\Psi^{(1)} = 0$ вычислить отношения $\alpha : \beta : \gamma$. (В силу линейной независимости векторов из любого соотношения типа $a\varphi_1^{(1)}\psi_1^{(2)} + b\varphi_0^{(1)}\psi_2^{(2)} = 0$ следует, что $a = b = 0$.) II. Найти числа α, β, γ, считая, что они нормированы условием $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, а число α положительно. III. Действуя понижающим оператором J_- на вектор $\Psi_1^{(1)}$, получить вектор $\Psi_0^{(1)}$.

7.9. Взяв коэффициенты Клебша — Гордана из задачи 7.7 и формулу для произведения D-матриц в конце § 4, п. Г, получите из матрицы $\mathsf{D}^{(1/2)}$, заданной формулой (20.38), матрицу $\mathsf{D}^{(1)}$. [Результат должен согласоваться с общей формулой (20.40).]

7.10. Постройте сферические функции $Y_m^{(3)}$ методом, изложенным в § 4, п. Д. Проверьте полученные выражения по общей формуле (7.48).

7.11. Применив понижающий оператор, покажите, что набор трех функций $-(x+iy)/2^{(1/2)}$, z и $(x-iy)/2^{(1/2)}$ принадлежит представлению $\mathsf{D}^{(1)}$.

7.12. Функции ψ_m с индексами $m=2, 1, \ldots, -2$, построенные в §4, п. Д, преобразуются по представлению $\mathsf{D}^{(2)}$ и образуют тензор-оператор ранга два. Поэтому, согласно теореме Вигнера — Эккарта [формула (7.53)], все их матричные элементы для векторов базиса задачи 7.11 должны быть связаны с одним приведенным матричным элементом. Проверьте это для некоторых матричных элементов двумя способами: а) пользуясь формулой (7.53) с коэффициентами Клебша — Гордана из задачи 7.8; б) вычислив интегралы с использованием скалярного произведения из § 2, п. Г, т. е. проинтегрировав по единичной сфере.

7.13. Покажите $\langle j \| \mathbf{J} \| j \rangle = \{j(j+1)\}^{1/2}$. [Запишите оператор $\mathbf{J}^2$ в виде $\mathbf{J}^2 = \sum_q \mathsf{J}_q \mathsf{J}_q^\dagger$ и вычислите матричный элемент $\langle jm | \mathbf{J}^2 | jm \rangle$, проводя суммирование по «промежуточным состояниям» $\sum_{q,m'} \langle jm | \mathsf{J}_q | jm' \rangle \langle jm' | \mathsf{J}_q^\dagger | jm \rangle$ с помощью формулы (7.53) и соотношения нормировки для коэффициентов векторного сложения.

7.14. Докажите, что коэффициенты Клебша — Гордана $C(ll0, m-m0)$ имеют следующий простой вид:

$$C(l, l, 0, m\ -m\ 0) = (-1)^{l-m}/(2l+1)^{1/2}.$$

Указание. Воспользуйтесь методом задачи 7.8. Для этого нужно

а) записать вектор $\Psi_0^{(0)}$ в виде $\Psi_0^{(0)} = \sum_m C(ll0, m-m0)\, \psi_m^{(l)}\, \psi_{-m}^{(l)}$;

б) из условия $\mathsf{J}_+ \Psi_0^{(0)} = 0$ найти соотношения между коэффициентами; в) применить соотношение нормировки и условие $C(ll0, l\ -l0) > 0$.

Постройте из пяти сферических функций $Y_m^{(2)}$ инвариант относительно преобразований из группы $\mathcal{R}_3$.

7.15. Покажите, что для группы $\mathcal{R}_3$ общее определение (7.61) оператора Казимира приводит к оператору $\mathsf{G} = -{}^1/_2 \mathbf{J}^2$.