живая лишь два первых слагаемых, получаем

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}_z(a))\,\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \approx \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) - \\ - \sum_i a \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

так что можно написать

$$\mathsf{R}_z(a) \approx 1 - a \sum_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}. \tag{8.7}$$

Таким образом, оператор бесконечно малого поворота системы частиц имеет вид

$$\mathsf{J}_z = -i \sum_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} = \mathsf{L}_z.$$

Сравнивая это выражение с (8.6), мы приходим к выводу, что оператор полного углового момента для системы частиц в точности совпадает (в единицах $\hbar$) с оператором бесконечно малого поворота этой системы. Именно к такому выводу мы пришли ранее в случае одной частицы.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ

Рассмотрим двухчастичную волновую функцию, равную произведению двух одночастичных волновых функций:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{l_1 m_1}(\mathbf{r}_1)\,\psi_{l_2 m_2}(\mathbf{r}_2). \tag{8.8}$$

Здесь индексы l — одночастичные угловые моменты, а индексы m — их z-компоненты. Под влиянием вращения $\mathsf{R}(\mathbf{a})$ функция Ψ претерпевает преобразование

$$\Psi' = \mathsf{T}(\mathsf{R}(\mathbf{a}))\,\Psi = \psi'_{l_1 m_1}\psi'_{l_2 m_2} = \sum_{m_1' m_2'} D^{(l_1)}_{m_1' m_1}(\mathbf{a})\, D^{(l_2)}_{m_2' m_2}(\mathbf{a}) \times \\ \times \psi_{l_1 m_1'}\psi_{l_2 m_2'}.$$

Отсюда видно, что набор из $(2l_1+1)(2l_2+1)$ функций мультипликативного вида (8.8) образует базис в произведении представлений $\mathsf{D}^{(l_1)} \otimes \mathsf{D}^{(l_2)}$ группы $\mathcal{R}_3$. Разложение произведения представлений на его неприводимые составляющие

$$\mathsf{D}^{(l_1)} \otimes \mathsf{D}^{(l_2)} = \sum_{|l_1 - l_2|}^{(l_1+l_2)} \mathsf{D}^{(L)} \tag{8.9}$$

было получено в гл. 7, § 4, п. Г. Но поскольку полный угловой момент пары частиц соответствует вращению всей пары, он может принимать только значения

$$L=(l_1+l_2),\quad (l_1+l_2-1),\quad \ldots,\quad |l_1-l_2|. \tag{8.10}$$

Равенство (8.10) называется правилом векторного сложения угловых моментов. В классической механике угловой момент есть вектор, так что сумма двух угловых моментов $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ получается путем обычного сложения векторов $\mathbf{L}=\mathbf{l}_1+\mathbf{l}_2$. Поэтому модуль вектора $\mathbf{L}$ зависит от угла между векторами $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ и лежит в пределах от $|\mathbf{l}_1|+|\mathbf{l}_2|$ до $||\mathbf{l}_1|-|\mathbf{l}_2||$. Эта классическая аналогия и дала название «правила векторного сложения» равенству (8.10); оно стремится к классическому результату в пределе больших угловых моментов и малых значений $\hbar$.

В случае вращений вокруг оси z имеет место простое свойство аддитивности представлений группы $\mathcal{R}_2$ (гл. 7, § 3, п. В)

$$\mathsf{T}^{(m_1)}\otimes\mathsf{T}^{(m_2)}=\mathsf{T}^{(m_1+m_2)}.$$

Оно означает, что z-компонента полного углового момента точно равна сумме соответствующих z-компонент обеих частиц. Собственные функции оператора полного углового момента даются теми комбинациями мультипликативных функций (8.8), которые обеспечивают разложение (8.9); как было показано выше (гл. 7, § 4, п. Г), этому требованию удовлетворяют коэффициенты Клебша — Гордана. Запишем эти собственные функции в виде

$$\Psi_{LM}(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)=\sum_{\substack{m_1\\(m_2=M-m_1)}} C(l_1l_2L,\ m_1m_2M)\,\psi_{l_1m_1}(\mathbf{r}_1)\,\psi_{l_2m_2}(\mathbf{r}_2). \tag{8.11}$$

Они обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{L}^2\Psi_{LM}=L(L+1)\,\Psi_{LM},$$
$$\mathsf{L}_z\Psi_{LM}=M\Psi_{LM}.$$

Добавляя последовательно угловой момент каждой новой частицы, по правилу (8.10) можно вычислить полный угловой момент любого числа частиц. В силу принципа Паули некоторые состояния полного углового момента могут оказаться неприемлемыми с физической точки зрения, но этот вопрос мы рассмотрим позже (§ 6, п. Г), когда уже введем понятие внутреннего спина.